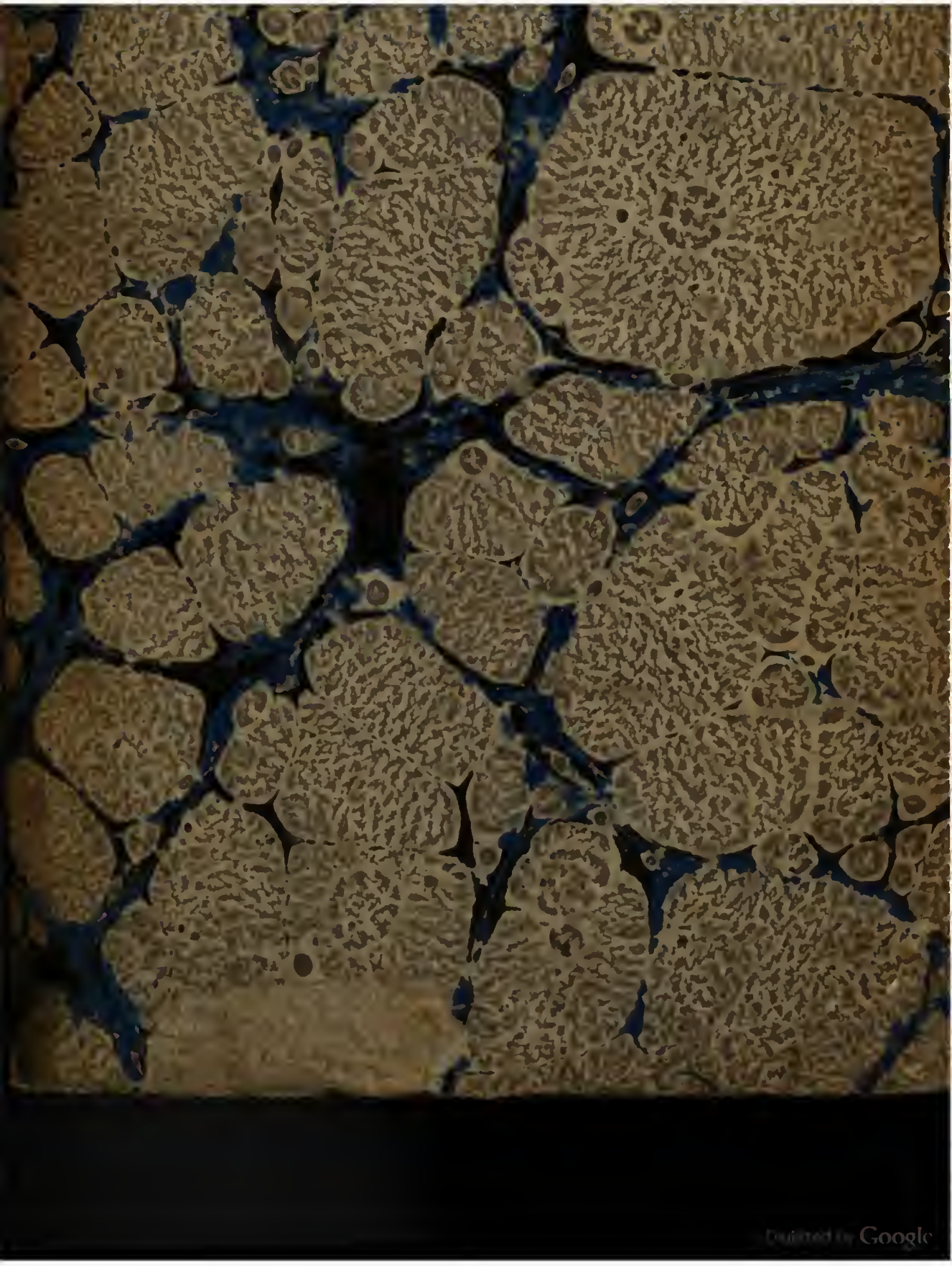

Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXIII

Palchetto C

Num.° d' ordine 12

1664

19825

NAZIONALE
B. Prov.
I
2042
NAPOLI
VITT. EM. III

B. Prov.
I
2042

B. 23

608243

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS,

POUR

L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

A PARIS,

Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Auguſtins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

PREFACE.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci penetre juſque dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : & par là elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiémes, quatriémes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter.

De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Une Analyſe de cette nature pouvoit ſeule nous conduire juſqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyſe des infiniment petits de déterminer la poſition de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'eſt-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'inflexion ou de rebrouſſement, les rayons qui s'y réfléchiſſent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inſcrits ou circonſcrits aux courbes, qui par la multiplication infinie de leurs côtés, ſe confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'eſt que depuis la découverte de l'Analyſe dont il s'agit ici, que l'on a bien ſenti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens ſur ces matiéres, principalement d'*Archimede*, eſt aſſurément digne d'admiration. Mais outre

qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement ; ce ne ſont preſque par tout que propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font apercevoir aucune méthode réguliere & ſuivie. Ce n'eſt pas cependant qu'on leur en puiſſe faire un reproche légitime : ils ont eu beſoin d'une extrême force de génie * pour percer à travers tant d'obſcurités, & pour entrer les premiers dans des païs entiérement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits ; du moins, quoi qu'en diſe † *Viette*, ils ne ſe ſont point égarés : & plus les chemins qu'ils ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y être pas perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pû faire davantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place ; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin ; mais on ne ſçauroit aſſés s'étonner que de grands hommes, & ſans doute d'auſſi grands hommes

* *Archimedis de lineis ſpiralibus tractatum cum bis terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium adſequerer; nuſquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam, &c.* Bullialdus Præf. de lineis ſpiralibus.

† *Si verè Archimedes, fallaciter concluſit Euclides, &c.* Suppl. Geom.

que les Anciens, en ſoient ſi long-temps demeurés là ; & que par une admiration preſque ſuperſtitieuſe pour leurs ouvrages, ils ſe ſoient contentés de les lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'autre uſage de leurs lumiéres, que ce qu'il en falloit pour les ſuivre ; ſans oſer commettre le crime de penſer quelquefois par eux-mêmes, & de porter leur vuë au delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette maniére bien des gens travailloient, ils écrivoient, les Livres ſe multiplioient, & cependant rien n'avançoit : tous les travaux de pluſieurs ſiecles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpectueux commentaires & de traductions répetées d'originaux ſouvent aſſés mépriſables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & ſur tout de la Philoſophie, juſqu'à M. *Deſcartes*. Ce grand homme pouſſé par ſon génie & par la ſupériorité qu'il ſe ſentoit, quitta les Anciens pour ne ſuivre que cette même raiſon que les Anciens avoient ſuivie ; & cette heureuſe hardieſſe, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vuës nouvelles & utiles ſur la Phyſique & ſur la Géometrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer.

Pour ne parler que des Mathématiques,

dont il eſt ſeulement ici queſtion, M. *Deſcartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la ſolution d'un Problême où *Pappus* dit * qu'ils étoient tous demeurés. On ſçait juſqu'où il a porté l'Analyſe & la Géometrie, & combien l'alliage qu'il en a fait, rend facile la ſolution d'une infinité de Problêmes qui paroiſſoient impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la réſolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes qu'autant qu'elles lui pouvoient ſervir à en trouver les racines: de ſorte que l'Analyſe ordinaire lui ſuffiſant pour cela, il ne s'aviſa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laiſſé de s'en ſervir heureuſement dans la recherche des tangentes; & la Méthode qu'il découvrit pour cela, lui parut ſi belle, qu'il ne fit point de difficulté de dire, *que *ce Problême etoit le plus utile & le plus général, non ſeulement qu'il ſçût, mais même qu'il eût jamais deſiré de ſçavoir en Géometrie.*

* *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

* *Geomet. Liv. 2.*

Comme la Géometrie de M. *Deſcartes* avoit mis la conſtruction des Problêmes par la réſolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela; la plûpart des Géometres s'y appliquérent, ils y firent auſſi de nouvelles découvertes, qui

s'augmentent & ſe perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Paſchal*, il tourna ſes vuës de tout un autre côté : il éxamina les courbes en elles-mêmes, & ſous la forme de polygone ; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'eſpace qu'elles renferment, le ſolide que ces eſpaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et par la conſidération ſeule de leurs élémens, c'eſt-à-dire des infiniment petits, il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus ſurprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & ſans analyſe.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Deſcartes* pour les tangentes, M. *de Fermat* en trouva auſſi une, que M. *Deſcartes* a enfin avoué * lui-même être plus ſimple en bien des rencontres que la ſienne. Il eſt pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore auſſi ſimple que M. *Barrow* l'a rendue depuis en conſidérant de plus près la nature des polygones, qui préſente naturellement à l'eſprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, compriſe entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correſpondantes ;

* *Lett. 71. Tom. 3.*

tes ; & ce triangle eſt ſemblable à celui qui ſe doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la ſoutangente : de ſorte que par une ſimple Analogie cette derniere Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Deſcartes*, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrow* * n'en demeura pas là, il inventa auſſi une eſpece de calcul propre à cette Méthode ; mais il lui falloit, auſſi-bien que dans celle de M. *Deſcartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les ſignes radicaux pour s'en ſervir.

* *Lect. Geomet. p.* 80.

Au défaut de ce calcul eſt ſurvenu celui du célebre * M. *Leibnis* ; & ce ſçavant Géometre a commencé où M. *Barrow* & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des païs juſqu'ici inconnus ; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. Mrs *Bernoulli* ont été les premiers qui ſe ſont aperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de ſurmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais oſé tenter auparavant.

* *Acta Erud. Lipſ. an.* 1684. *p.* 467.

L'étendue de ce calcul eſt immenſe : il convient auxco urbes mécaniques, comme aux

géometriques ; les ſignes radicaux lui ſont indifferens ; & même ſouvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaiſon des infiniment petits de tous les genres lui eſt également facile. Et de là naiſſent une infinité de découvertes ſurprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux queſtions *De maximis & minimis*, aux points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes, aux dévelopées, aux cauſtiques par réfléxion ou par refraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le diviſe en dix Sections. La premiere contient les principes du calcul des différences. La ſeconde fait voir de quelle maniére l'on s'en doit ſervir pour trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime, quoique M. *Craige* * n'ait pas crû qu'il pût s'étendre juſqu'aux courbes mécaniques ou tranſcendantes. La troiſiéme, comment il ſert à réſoudre toutes les queſtions *De maximis & minimis*. La quatriéme, comment il donne les points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes. La cinquiéme en découvre l'uſage pour trouver les dévelopées de M. *Hugens*, dans toutes ſortes de courbes.

* *De figurarum curvilinearum quadraturis, part.* 2.

La ſixiéme & la ſeptiéme font voir comment il donne les cauſtiques, tant par réfléxion que par réfraction, dont l'illuſtre M. *Tſchirnhaus* eſt l'inventeur, & pour toutes ſortes de courbes encore. La huitiéme en fait voir encore l'uſage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de poſition, droites ou courbes. La neuviéme contient la ſolution de quelques Problêmes qui dépendent des découvertes précedentes. Et la dixiéme conſiſte dans une nouvelle maniére de ſe ſervir du calcul des différences pour les courbes géometriques : d'où l'on déduit la Méthode de M^rs *Deſcartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces ſortes de courbes.

Il eſt à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très peu de propoſitions ; mais elles ſont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il eſt aiſé de faire l'application à tant de propoſitions particulieres qu'on voudra : je la fais ſeulement ſur quelques éxemples choiſis, perſuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne conſiſtent qu'en détail ou en propoſitions particulieres, ne ſont bons qu'à faire perdre

du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les liſent. Auſſi n'ai-je ajoûté les Problêmes de la Section neuviéme, que parcequ'ils paſſent pour curieux, & qu'ils ſont très univerſels. Dans la dixiéme Section ce ne ſont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de M^rs *Deſcartes* & *Hudde;* & ſi elles ſont ſi limitées, on voit par toutes les précedentes que ce n'eſt pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartéſienne à laquelle on l'aſſujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'uſage immenſe de ce calcul, que toute cette varieté de Méthodes; & pour peu d'attention qu'on y faſſe, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de M^rs *Deſcartes* & *Hudde*, & que la preuve univerſelle qu'il donne de l'uſage qu'on y fait des progreſſions arithmétiques, ne laiſſe plus rien à ſouhaiter pour l'infaillibilité de cette derniere Méthode.

J'avois deſſein d'y ajoûter encore une Section pour faire ſentir auſſi le merveilleux uſage de ce calcul dans la Phyſique, juſqu'à quel point de préciſion il la peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché:

Le public n'y perdra pourtant rien, & il l'aura quelque jour même avec uſure.

Dans tout cela il n'y a encore que la premiere partie du calcul de M. *Leibnis*, laquelle conſiſte à deſcendre des grandeurs entiéres à leurs différences infiniment petites, & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils ſoient : c'eſt ce qu'on appelle *Calcul differentiel.* Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui conſiſte à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils ſont les différences, c'eſt-à-dire à en trouver les ſommes, j'avois auſſi deſſein de le donner. Mais M. *Leibnis* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le public d'un ſi bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverſe des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, pour celles des ſurfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimenſion de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parcequ'il m'en a prié par ſes Lettres, & que je le crois néceſſaire pour préparer les eſprits

à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la ſuite ſur ces matiéres.

Au reſte je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs *Bernoulli*, ſur tout à celles du jeune preſentement Profeſſeur à Groningue. Je me ſuis ſervi ſans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*. C'eſt pourquoi je conſens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laiſſer.

C'eſt encore une juſtice dûë au ſçavant M. *Neuwton*, & que M. *Leibnis* lui a renduë* lui-même: Qu'il avoit auſſi trouvé quelque choſe de ſemblable au calcul différentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé *Philoſophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel eſt preſque tout de ce calcul. Mais la Caracteriſtique de M. *Leibnis* rend le ſien beaucoup plus facile & plus expeditif; outre qu'elle eſt d'un ſecours merveilleux en bien des rencontres.

* *Journal des Sçavans du 30 Aouſt 1694.*

Comme l'on imprimoit la derniere feüille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuwentiit* m'eſt tombé entre les mains. Son titre, *Analyſis infinitorum*, m'a donné la curioſité de le parcourir: mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci; car outre que cet Auteur

ne ſe ſert point de la Caracteriſtique de M. *Leibnis*, il rejette abſolument les différences ſecondes, troiſiémes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage ſur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ſes objections, & de faire voir combien elles ſont peu ſolides, ſi M. *Leibnis* n'y avoit déja pleinement ſatisfait dans les Actes * de Leypſick. D'ailleurs les deux demandes ou ſuppoſitions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & ſur leſquelles ſeules il eſt appuyé, me paroiſſent ſi évidentes, que je ne crois pas qu'elles puiſſent laiſſer aucun doute dans l'eſprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la maniére des Anciens, ſi je ne me fuſſe propoſé d'être court ſur les choſes qui ſont déja connues, & de m'attacher principalement à celles qui ſont nouvelles.

* *Acta Erud. an. 1695. p. 310 & 369.*

TABLE.

SECTION I. *Où l'on donne les Regles du calcul des différences*, page 1

SECT. II. *Usage du calcul des differences pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes*, 11

SECT. III. *Usage du calcul des differences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions* De maximis & minimis, 41

SECT. IV. *Usage du calcul des differences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement*, 55

SECT. V. *Usage du calcul des differences pour trouver les développées*, 71

SECT. VI. *Usage du calcul des differences pour trouver les caustiques par réflexion*, 104

SECT. VII. *Usage du calcul des differences pour trouver les caustiques par réfraction*, 120

SECT. VIII. *Usage du calcul des differences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes*, 131

SECT. IX. *Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précedentes*, 145

SECT. X. *Nouvelle maniére de se servir du calcul des differences dans les courbes géometriques, d'où l'on déduit la Méthode de Mrs Descartes & Hudde*, 164

ANALYSE

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.
Où l'on donne les regles de ce Calcul.

DE'FINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *conſtantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent Ainſi dans une parabole les appliquées & les coupées ſont des quantités variables, au lieu que le parametre eſt une quantité conſtante.

DEFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la
FIG. 1. *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ſes appliquées la droite *PM*; & ſoit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* ſera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour baſe l'arc *Mm*, ſera la difference du ſegment *AM*; & le petit eſpace *MPpm*, celle de l'eſpace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

COROLLAIRE.

1. IL eſt évident que la difference d'une quantité conſtante eſt nulle ou zero: ou (ce qui eſt la même choſe) que les quantités conſtantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On ſe ſervira dans la ſuite de la note ou caracteriſtique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une ſeule lettre; & pour éviter la confuſion, cette note* d *n'aura point d'autre uſage dans la ſuite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'eſpace mixtiligne* APM, s; *& le ſegment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit eſpace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puiſſe prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui eſt la même

choſe) qu'une quantité qui n'eſt augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puiſſe être conſidérée comme demeurant la même. On demande par éxemple qu'on puiſſe prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'eſpace Apm pour l'eſpace APM, le petit eſpace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit ſecteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puiſſe être conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui eſt la même choſe) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, leſquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par éxemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puiſſent être conſidérés comme des lignes droites à cauſe de leur infinie petiteſſe, en ſorte que le petit triangle mSM puiſſe être cenſé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On ſuppoſe ordinairement dans la ſuite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités conſtantes: de ſorte que* x *devenant* x + dx; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* * *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, *&c.*

* Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. PRENDRE *la différence de pluſieurs quantités ajoûtées enſemble, ou ſouſtraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la difference. Si l'on ſuppoſe que x ſoit augmentée d'une portion infiniment petite; c'eſt à dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

viendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la constante a, *elle demeurera la même a: de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette regle.

* *Art.* 1.

Regle I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

Proposition II.

Problême.

5. Prendre *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $ydx + xdy + dxdy$, c'est à dire $*ydx + xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise par éxemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la ſeconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$), & partant la différence de xyz ſera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ eſt $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui ſe prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une ſeule quantité. Il en eſt ainſi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres, eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainſi la différence de ax eſt $xo + adx$, c'eſt à dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx-xdy}{yy}$. Car ſuppoſant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, ſoit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'enſuit que leur différence, c'eſt à dire leurs accroiſſemens ou diminutions ſeront auſſi égales entr'elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx-zdy}{y} = \frac{ydx-xdy}{yy}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle. * *Art. 5.*

REGLE III.

Pour les quantités diviſées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque eſt égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout diviſé par le quarré du dénominateur.

Ainſi la différence de $\frac{a}{x}$ ſera $=\frac{a\,dx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ ſera $\frac{a\,dx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il eſt néceſſaire afin de donner une régle générale qui ſerve pour les puiſſances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui ſe rencontre entre leurs expoſans.

Si l'on propoſe une progreſſion geométrique dont le premier terme ſoit l'unité, & le ſecond une quantité quelconque x, & qu'on diſpoſe par ordre ſous chaque terme ſon expoſant, il eſt clair que ces expoſans formeront une progreſſion arithmetique.

Prog. geom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.

Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et ſi l'on continue la progreſſion geométrique au deſſous de l'unité, & l'arithmetique au deſſous de zero, les termes de celle-ci ſeront les expoſans de ceux auſquels ils répondent dans l'autre. Ainſi -1 eſt l'expoſant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais ſi l'on introduit quelque nouveau terme dans la progreſſion geométrique, il faudra pour avoir ſon expoſant, en introduire un ſemblable dans l'arithmetique.

Ainſi $\sqrt{x}$ aura pour expoſant $\frac{1}{2} : \sqrt[3]{x}, \frac{1}{3} : \sqrt{x^4}, \frac{4}{3} : \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, -\frac{5}{3} : \frac{1}{\sqrt{x^7}}, -\frac{7}{2}$: &c. de ſorte que ces expreſ-

ſions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ & $x^{-\frac{1}{2}}$, &c. ne ſignifient que la même choſe.

Prog. geom. $1, \sqrt{x}, x. 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x. 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$

Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, 1. 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1. 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$

Prog. geom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x}, \sqrt[3]{x^4}, \sqrt[3]{x^5}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$

Prog. arith. $-1, -\frac{1}{2}, -2. -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2. -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ eſt moyenne geométrique entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{2}$ eſt moyenne arithmetique entre leurs expoſans zero & 1: & de même que $\sqrt[3]{x}$ eſt la premiere des deux moyennes geométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{3}$ eſt la premiere des deux moyennes arithmetiquement proportionnelles entre leurs expoſans zero & 1: & il en eſt ainſi des autres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions.

1°. Que la ſomme des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^4 par x^3, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'eſt à dire ſon quarré, & $x^{1+1+1+1}$ où x^4 eſt le produit de x^1 par x^1 par x^1, c'eſt à dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ où $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatriéme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du

quotient de la diviſion de ces termes. Ainſi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'eſt la même choſe de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviſer $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en eſt ainſi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas, lorſque la puiſſance eſt parfaite, c'eſt à dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre entier. La différence de xx eſt $2xdx$, de x^3 eſt $3xxdx$, de x^4 eſt $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre choſe que le produit de x par x, ſa différence * ſera $xdx + xdx$, c'eſt à dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre choſe que le produit de x par x par x, ſa différence * ſera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'eſt à dire $3xxdx$; & comme il en eſt ainſi des autres puiſſances à l'infini, il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m ſera $mx^{m-1}dx$.

*Art. 5.

Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ ſera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorſque la puiſſance eſt imparfaite, c'eſt à dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre rompu. Soit propoſé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on ſuppoſera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puiſſance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} ſa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ ſera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les Puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence.

Ainſi ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'eſt à dire de $\overline{ay-xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay-xx}^2 \times \overline{ady-2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}} \times ydx + xdy + 2ydy$, ou $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}} \times ayydx + 2axydy$, ou $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3} \times \overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}} \times adx + 2xdx$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^2}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times adx + 2xdx + \frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}} + \frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy} \times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

* *Art. 7. 6.* La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ ſera ſelon cette regle* & celle des fractions $\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx^2}} \times \sqrt{xy+yy} \; \frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}} \times \sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

8. IL eſt à propos de bien remarquer que l'on a toujours ſuppoſé en prenant les différences, qu'une des variables x croiſſant, les autres y, z, &c. croiſſoient auſſi; c'eſt à dire que les x devenant $x + dx$, les y, z, &c. devenoient $y + dy$, $z + dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître, & changer par conſéquent les ſignes des termes où les differences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt à dire que les x devenant $x + dx$, les y & les z deviennent $y - dy$ & $z - dz$, & que l'on veuille prendre la difference du produit xyz; il faudra changer
* *Art. 5.* dans la différence $xydz + xzdy + yzdx$ trouvée *, les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent: ce qui donne $yzdx - xydz - xzdy$ pour la différence cherchée.

SECTION II.

Uſage du calcul des differences pour trouver les Tangentes de toutes ſortes de lignes courbes.

DE'FINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du poligone qui compoſe * une ligne courbe ; ce petit côté ainſi prolongé ſera appellé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*. FIG. 2. * *Art.* 1.

PROPOSITION I.

Problême.

9. SOIT *une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *ſoit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *ſur cette courbe mener la tangente* MT. FIG. 3.

Ayant mené l'appliquée *MP*, & ſuppoſé que la droite *MT* qui rencontre le diametre au point *T*, ſoit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite *MR* parallele à *AP*. Et en nommant les données *AP*, *x* ; *PM*, *y* ; (donc *Pp* ou *MR* = *dx*, & *Rm* = *dy*.) les triangles ſemblables *mRM* & *MPT* donneront *mR* (*dy*). *RM* (*dx* :: *MP* (*y*). $PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui ſeront tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* & diviſée par *dy*, donnera une valeur de la ſoutangente *PT* en termes entiérement connus & délivrés des differences, laquelle ſervira à mener la tangente cherchée *MT*.

REMARQUE.

10. LORSQUE le point *T* tombe du côté oppoſé au point *A* origine des *x*, il eſt clair que *x* croiſſant, *y* dimi- FIG. 4.

* *Art.* 8. nue, & qu'il faut changer par conſéquent* dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative ; & partant auſſi celle de PT ($\frac{ydx}{dy}$). Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embaraſſer, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on
* *Sect.* 1. a preſcrites * ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les éxemples ſuivans.

EXEMPLE I.

FIG. 3. II. 1°. SI l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

FIG. 4. 2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{1}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente $PT = \frac{1}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente $PT = -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point; car il eſt viſible que cette raiſon étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre ſera auſſi déterminé. On a dans cet éxemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raiſon de dy à dx doit y être infiniment grande lorſque m ſurpaſſe 1, & infiniment petite lorſqu'elle eſt moindre: c'eſt à dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & ſe confondre avec le diametre dans le ſecond.

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ FIG. 5. $(x \times \overline{a-x}) . \overline{PM}^2 (yy) :: AB (a) . AD (b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les differences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = \frac{2ayy}{ab-2bx} = \frac{2ax-2xx}{a-2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ ſa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a-2x}$.

Suppoſant à préſent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2\ (x^3 \times \overline{a-x}^2) . \overline{PM}^5\ (y^5) :: AB (a) . AD (b)$, on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$, & en prenant les differences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx+2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - 2a+2x \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a-3x-2x}$ ou $\frac{5ax-5xx}{3x-5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a-5x}$.

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP, & n celui de la puissance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m+n}ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$)

$$PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}x \times \overline{a-x}}{\overline{ma-x}-nx},$$

ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{\overline{ma-m-nx}}$, & $AT = \frac{nax}{\overline{ma-m-nx}}$.

EXEMPLE III.

FIG. 6. 13. LES mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point B tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considerées par rapport à leurs diametres. D'où l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{\overline{ma+m+nx}}$ & $AT = \frac{nax}{\overline{ma+m+nx}}$.

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est à dire qu'elle en deviendra l'asymptote CE; & l'on aura en ce cas $AT\left(\frac{nax}{\overline{ma+m+nx}}\right) = \frac{n}{m+n}a = AC$; puisque a étant infiniment moindre que x, le terme ma sera nul par rapport à $\overline{m+nx}$. Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainsi en faisant pour abréger $m+n = p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la différence est $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx.dy$, ou $\sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b} :: AC.(\frac{n}{p}a).AE = \frac{n}{p}\sqrt[p]{b}a^{p-1}$. Or les

valeurs de CA & AE étant ainſi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui ſera l'aſymptote cherchée.

Si $m=1$ & $n=1$, la courbe ſera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC=\frac{1}{2}a$, & $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'eſt à dire à la moitié du diametre conjugué, ce que l'on ſçait d'ailleurs être conforme à la vérité.

EXEMPLE IV.

14. SOIT l'équation $y^3-x^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, a eſt une ligne droite donnée) & que cette équation exprime la nature de la courbe AM, ſa différence ſera $3yy\,dy-3xx\,dx=ax\,dy+ay\,dx$. Donc $\frac{y\,dx}{dy}=\frac{3y^3-axy}{3xx+ay^2}$ & $AT\left(\frac{y\,dx}{dy}-x\right)=\frac{2y^3-3x^3-2axy}{3xx+ay}=\frac{axy}{3xx+ay}$ en mettant pour $3y^3-3x^3$ ſa valeur $3axy$. FIG. 6.

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que AP & PM ſoient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'aſymptote CE, & les droites AT, AS deviendront AC, AE qui déterminent la poſition de l'aſymptote. Or AT que j'appelle $t=\frac{axy}{3xx+ay}$, d'où l'on tire $y=\frac{3txx}{ax-at}=\frac{3tx}{a}$ lors que AT devient AC, parcequ'alors at eſt nulle par rapport à ax. Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3-x^3=axy$, on aura $27t^3x^3-a^3x^3=3a^2txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^2txx$, parceque x étant infinie, il eſt nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) $AC\,(t)=\frac{1}{3}a$. De même $AS\left(y-\frac{xdy}{dx}\right)$ que j'appelle $s=\frac{axy}{3yy-ax}$, d'où l'on tire $x=\frac{3syy}{ay+as}=\frac{3sy}{a}$, parceque y étant infinie par rapport à s, le terme as ſera nul par rapport au terme ay; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera $AE\,(s)=\frac{1}{3}a$. D'où il ſuit que ſi l'on prend les lignes AC, AE égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie CE, elle ſera l'aſymptote de la courbe AM.

On ſe réglera ſur ces deux derniers éxemples pour trouver les aſymptotes des autres lignes courbes.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 7. 15. *Si l'on ſuppoſe dans la propoſition précédente que les coupées* AP *ſoient des portions d'une ligne courbe dont l'on ſçache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *ſur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & ſuppoſé que la droite MT qui la rencontre en T, ſoit la tangente cherchée ; on imaginera une autre appliqué mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT : & en nommant les données AP, x ; PM, y ; on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy$, & les triangles ſemblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy).\,RM\,(dx) :: MP\,(y).\,PT = \frac{ydx}{dy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP\,(x)$ aux appliquées $PM\,(y)$, comme l'on a vû dans les éxemples qui précedent, & comme l'on verra encore dans ceux qui ſuivent.

EXEMPLE I.

16. SOIT $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence eſt $\frac{2xydy-yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduiſant cette égalité à une proportion $dy.\,dx\,(MP.PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx}.\frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la ſoutangente cherchée PT, ſera exprimé en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit propoſé.

EXEM-

EXEMPLE II.

17. SOIT $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence eſt $dx = \frac{ady}{b}$: on aura $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on ſuppoſe que la ligne courbe APB ſoit un demi-cercle, & que les appliquées MP, étant prolongées en Q, ſoient perpendiculaires ſur le diametre AB; la courbe AMC ſera une demi-roulette ou cycloïde: ſimple lorſque $b = a$, allongée lorſqu'elle eſt plus grande, & accourcie lorſqu'elle eſt moindre.

COROLLAIRE.

18. SI la roulette étant ſimple, l'on mene la corde AP; je dis qu'elle ſera parallele à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors iſoſcele, l'angle externe TPQ ſera double de l'interne oppoſé TMQ. Or l'angle APQ eſt égal à l'angle APT, puiſque l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc AP; & partant il eſt la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ ſeront donc égaux entr'eux; & par conſequent les lignes MT, AP ſeront paralleles.

PROPOSITION III.

Problême.

19. SOIT *une ligne courbe quelconque* AP *qui ait pour diametre la droite* KNAQ, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PK; *ſoit de plus une autre courbe* AM *telle que menant comme on voudra, l'appliquée* MQ *qui coupe la premiere courbe au point* P, *la relation de l'arc* AP *à l'appliquée* MQ *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *mener la tangente* MN. FIG. 7.

Ayant nommé les connues PK, t; KQ, s; l'arc AP, x; MQ, y; l'on aura (en concevant une autre appliquée mq infiniment proche de MQ, & en tirant PO, MS paralleles à AQ.) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cauſe des triangles ſemblables KPQ & PpO, mSM & MQN, l'on aura $PK\ (t)$.

$K\mathcal{Q}(s) :: Pp(dx)$. PO ou $MS = \frac{sdx}{t}$. Et $mS(dy)$. $SM\left(\frac{sdx}{t}\right) :: M\mathcal{Q}(y)$. $\mathcal{Q}N = \frac{sydx}{tay}$. Or par le moyen de la difference de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui ſeront tous affectés par dy, & partant ſi l'on ſubſtitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sydx}{tay}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente cherchée $\mathcal{Q}N$ ſera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 8. 20. SOIENT *deux lignes courbes* AQC, BCN *qui ayent pour diametre la droite* TEABF, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* QE, NF; *ſoit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur cette derniere courbe lui mener la tangente* MT.

Ayant imaginé aux points $\mathcal{Q}$, M, N, les petits triangles $\mathcal{Q}Oq$, MRm, NSn, & nommé les connues PE, s; PF, t; $P\mathcal{Q}, x$; PM, y; PN, z; l'on aura $Oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn = -dz$,* parceque x & y croiſſant, z diminue. Et à cauſe des triangles ſemblables $\mathcal{Q}PE$ & $qO\mathcal{Q}$, NPF & nSN, MPT & mRM; l'on aura $\mathcal{Q}P(x)$. $PE(s) :: qO(dx)$. $O\mathcal{Q}$ ou MR ou $SN = \frac{sdx}{x}$. Et $NP(z)$. $PF(t) :: nS(-dz)$. $SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et $mR(dy)$. $RM\left(\frac{sdx}{x}\right) :: MP(y)$. $PT = \frac{sydx}{xdy}$. Or ſi l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de dz, ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente PT ſera exprimée en termes tous connus.

* *Art.* 8.

EXEMPLE.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence eſt $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{s}$, en mettant pour dz ſa valeur négative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant $PT\left(\frac{ydx}{xdy}\right) = \frac{2sty}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s}$, en mettant pour yy ſa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence eſt $\overline{m + n}y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{s}$, en mettant pour dz ſa valeur $\frac{-szdx}{tx}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{ydx}{xdy}\right) = \frac{\overline{mst + nst}y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} ſa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que ſi les courbes AQC, BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini; ſçavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrémités A, B; une Hyperbole lorſqu'elle tombe de part ou d'autre; & enfin une Parabole lorſque l'une des extrémités A ou B eſt infiniment éloignée de l'autre, c'eſt à dire lorſque l'une des lignes droites CA ou CB eſt parallele au diametre AB.

PROPOSITION V.

Problême.

22. SOIT *une ligne courbe* APB *qui ait un commencement fixe & invariable au point* A, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PH; *ſoit hors de cette ligne un autre point fixe* F, *& une autre ligne courbe* CMD *telle qu'ayant mené la droite quelconque* FMP, *la relation de ſa partie* FM *à la portion de courbe* AP *ſoit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propoſe de mener du point donné* M *la tangente* MT. FIG. 9.

Ayant mené ſur FP la perpendiculaire FH qui rencon-

tre la tangente donnée PH au point H, & la cherchée MT au point T, imaginé une droite $FRmOp$ qui faſſe avec FP un angle infiniment petit, & décrit du centre F les petits arcs du cercle PO, MR; le petit triangle pOP ſera ſemblable au triangle rectangle PFH; car les angles HPF, HpF ſont * égaux, puiſqu'ils ne différent entr'eux que de l'angle PFp que l'on ſuppoſe infiniment petit, & de plus l'angle pOP eſt droit, puiſque la tangente en O (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit arc PO conſidéré comme une droite) eſt perpendiculaire ſur le rayon FO. Par la même raiſon les triangles mRM, MFT ſeront ſemblables. Or il eſt clair que les petits triangles ou ſecteurs FPO & FMR ſont ſemblables. Si donc l'on nomme les connues PH, t; HF, s; FM, y; FP, z; & l'arc AP, x; on aura $PH\,(t).\ HF\,(s) :: Pp\,(dx).\ PO = \frac{sdx}{t}$. Et $FP\,(z).\ FM\,(y) :: PO\left(\frac{sdx}{t}\right).\ MR = \frac{ysdx}{tz}$. Et $mR\,(dy).\ RM\left(\frac{sydx}{tz}\right) :: FM\,(y).\ FT = \frac{syydx}{tzdy}$. Et on achevera le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée.

* *Art.* 2.

EXEMPLE.

FIG. 10. 23. SI l'on veut que la courbe APB ſoit un cercle qui ait pour centre le point fixe F; il eſt clair que la tangente PH devient parallele & égale à la ſoutangente FH, à cauſe que HP ſera auſſi perpendiculaire à PF; & qu'ainſi l'on aura en ce cas $FT = \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$, en nommant la droite $FP\,(z), a$; parcequ'elle devient conſtante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela poſé, ſi l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ſes portions déterminées, b; & que l'on faſſe $b.\ x :: a.\ y$. la courbe CMD, qui eſt en ce cas FMD, ſera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour ſa différence $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a} = xdy$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant $FT\left(\frac{yydx}{ady}\right) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit décrit du centre F & du rayon FM, l'arc de cercle MQ, terminé en Q par le rayon FA qui joint les points fixes A, F; ſoit pris FT égale à l'arc MQ : je dis que la droite MT ſera tangente en M. Car à cauſe des ſecteurs ſemblables FPA, FMQ, l'on aura $FP\ (a).FM\ (y) :: AP\ (x) . MQ = \frac{yx}{a} = FT$.

Si l'on fait en général $b . x :: a^m . y^m$, (l'expoſant m déſigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD ſera une des ſpirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour ſa différence $my^{m-1}dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$, en mettant pour y^m ſa valeur $\frac{a^m x}{b}$; & partant $FT\left(\frac{yydx}{ady}\right) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ$.

PROPOSITION VI.

Problême.

24. SOIT *une ligne courbe* APB *dont l'on ſçache mener les tangentes* PH, *& un point fixe* F *hors de cette ligne ; ſoit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme on voudra, la droite* FPM, *la relation de* FP *à* FM *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné* M *mener la tangente* MT. FIG. 11.

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire ſur FM, & imaginé comme dans la propoſition précédente les petits triangles POp, MRm ſemblables aux triangles HFP, TFM, on nommera les connues FH, s; FP, x; FM, y; & l'on aura $PF\ (x) . FH\ (s) :: pO\ (dx) . OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP\ (x) . FM\ (y) :: OP\ \left(\frac{sdx}{x}\right) . RM = \frac{sydx}{xx}$. Et $mR\ (dy) . RM\ \left(\frac{sydx}{xx}\right) :: FM\ (y) . FT = \frac{syydx}{xxdy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée.

EXEMPLE.

25. SI l'on veut que la courbe APB ſoit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM ſoit $y - x = a$, c'eſt à dire que PM ſoit toujours égale à la même droite donnée a; l'on aura pour difference $dy = dx$; & partant $FT\left(\frac{syydx}{xxdy}\right) = \frac{syy}{xx}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée ME parallele à PH, & MT parallele à PE; je dis qu'elle ſera tangente en M.

Car $FP\ (x).\ FH\ (s) ::\ FM\ (y).\ FE = \frac{sy}{x}$. Et $FP\ (x).\ FE\ (\frac{sy}{x}) ::\ FM\ (y).\ FT = \frac{syy}{xx}$. Il eſt clair que la courbe CMD eſt la Conchoïde de *Nicomede*, dont l'aſymptote eſt la droite PH, & le pole eſt le point fixe F.

PROPOSITION VII.

Problême.

FIG. 12. 26. SOIT *une ligne courbe* ARM *dont l'on ſçache mener les tangentes* MH, *& qui ait pour diametre la droite* EPAHT, *ſoit hors de ce diametre un point fixe* F, *d'où parte une ligne droite indéfinie* FPSM *qui coupe le diametre en* P *& la courbe en* M. *Si l'on conçoit maintenant que la droite* FPM, *en tournant autour du point* F, *faſſe mouvoir le plan* PAM *toujours parallelement à ſoi-même le long de la ligne droite* ET *immobile & indéfinie, en ſorte que la diſtance* PA *demeure partout la même; il eſt clair que l'interſection continuelle* M *des lignes* FM, AM *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CMD. *On propoſe de mener d'un point donné M ſur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que le plan PAM ſoit parvenu dans la ſituation infiniment proche pam, & tiré la ligne mRS parallele à AP; il eſt clair par la génération que $Pp = Aa = Rm$; & partant que $RS = Sm - Pp$. Or nommant les connues FP ou Fp, x; FM ou Fm, y; PH, s; MH, t; &

la différence Pp, dz; les triangles ſemblables FPp & FSm, MPH & MSR, MHT & MRm, donneront $Fp(x).Fm(y)::Pp(dz).Sm=\frac{ydz}{x}$ (donc $SR=\frac{ydz-xdz}{x}$).

Et $PH(s).HM(t)::SR\left(\frac{ydz-xdz}{x}\right).RM=\frac{tydz-txdz}{sx}$.

Et $MR\left(\frac{tydz-txdz}{sx}\right).Rm(dz)::MH(t).HT=\frac{sx}{y-x}$.

Donc ſi l'on mene FE parallele à MH, & qu'on prenne $HT=PE$; la ligne MT ſera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la courbe CMD ſeroit une Hyperbole qui auroit pour une de ſes aſymptotes la ligne ET. Et ſi elle étoit un cercle qui eût ſon centre au point P; la courbe CMD ſeroit la Conchoïde de *Nicomede*, qui auroit pour aſymptote la ligne ET, & pour pole le point F. Mais ſi elle étoit une parabole; la courbe CMD ſeroit la compagne de la Paraboloïde de *Deſcartes* *, qui ſe décriroit en même temps au deſſous de la droite ET par l'interſection de FP avec l'autre moitié de la Parabole.

* *Geom. Liv.* 3.

PROPOSITION VIII.

Problême.

27. SOIT *une ligne courbe* AN *qui ait pour diametre la ligne droite* AP, *avec un point fixe* F *hors de ces lignes; ſoit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme l'on voudra, la droite* FMPN, *la relation de ſes parties* FN, FP, FM *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il eſt queſtion de tirer du point donné* M *la tangente* MT. FIG. 14.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diametre AP, & en H la tangente donnée NH; ſoient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM des petits arcs de cercle NQ, PO, MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela poſé.

Si l'on nomme les connues FK,s; FH,t; FP,x; FM,y; FN,z; les triangles ſemblables PFK & pOP, FMR &

FPO & FNQ, HFN & NQn, mRM & MFT donneront $PF(x).FK(s) :: pO(dx).OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP(x).FM(y) :: PO(\frac{sdx}{x}).MR\frac{sydx}{xx}$. Et $FP(x).FN(z) :: PO(\frac{sdx}{x}).NQ = \frac{nsdx}{xx}$. Et $HF(t).FN(z) :: NQ(\frac{nsdx}{xx}).Qn(-dz) = \frac{snzdx}{txx}$. Et $mR(dy).RM(\frac{sydx}{xx}) :: FM(y).FT = \frac{syydx}{xxdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée on trouvera une valeur de dy en dx & dz, dans laquelle mettant à la place de dz ſa valeur négative $\frac{-nsdx}{txx}$, parceque x croiſſant, z diminue; tous les termes ſeront affectés par dx; de ſorte que cette valeur étant enfin ſubſtituée dans $\frac{syydx}{xxdy}$, les dx ſe détruiront. Et partant la valeur de FT ſera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

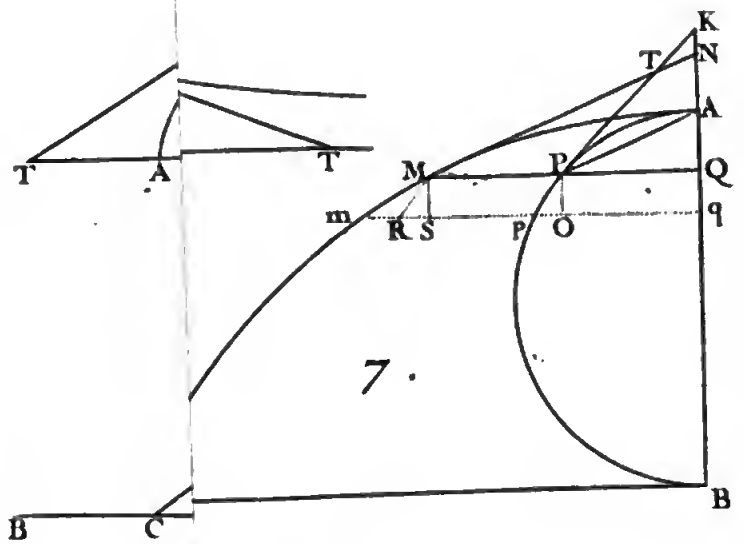
Si l'on ſuppoſoit que la ligne droite AP fût une ligne courbe, & qu'on menât la tangente PK; on trouveroit toujours pour FT la même valeur, & le raiſonnement demeureroit le même.

EXEMPLE.

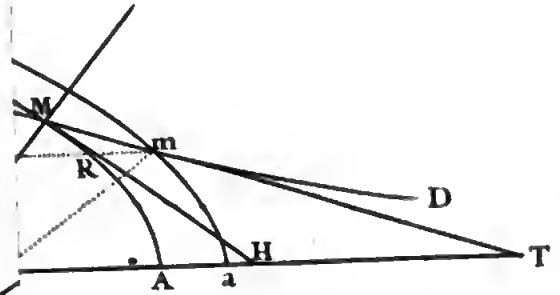
FIG. 14. 28. SUPPOSONS que la ligne courbe AN ſoit un cercle qui paſſe par le point F (tellement ſitué à l'égard du diametre AP que la ligne FB perpendiculaire à ce diametre paſſe par le centre G de ce cercle), & que PM ſoit toujours égale à PN; il eſt clair que la courbe CMD, qui devient en ce cas FMA, ſera la Ciſſoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation $z + y = 2x$, dont la différence eſt $dy = 2dx - dz = \frac{2txxdx + szzdx}{txx}$ en mettant pour dz ſa valeur $-\frac{szzdx}{txx}$ trouvée ci-deſſus *. Et partant $FT(\frac{syydx}{xxdy}) = \frac{styy}{2txx + szz}$.

* Art. 27.

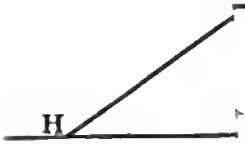
Si le point donné M tomboit ſur le point A, les lignes FM, FN, FP ſeroient égales chacune à FA, comme auſſi les

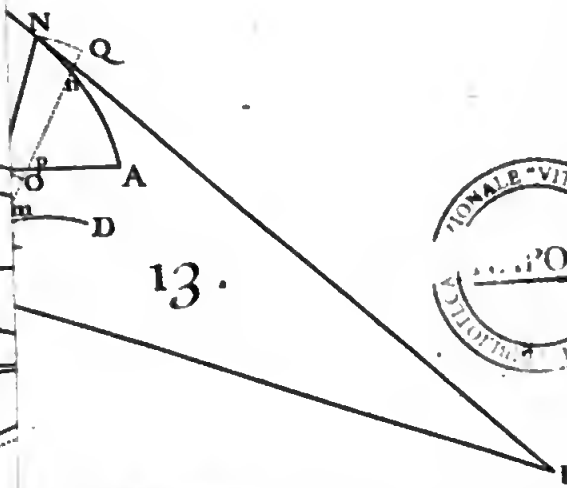


7.



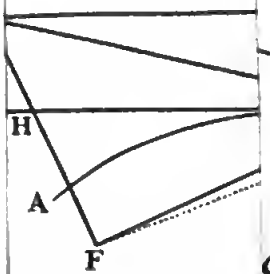
9





11.

13.



Gravé par Berey

TIONALE "VITT... NAPOLI BIBLIOTECA

les droites FK, FH; & partant on auroit en ce cas $FT = \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$, c'eſt à dire que ſi l'on prend $FT = \frac{1}{3}AF$, & qu'on mene la ligne AT, elle ſera tangente en A.

On peut encore trouver les tangentes de la Ciſſoïde par le moyen de la premiere Propoſition, en menant les perpendiculaires NE, ML ſur le diametre FB, & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM; ce qui ſe fait ainſi. Ayant nommé les connues FB, $2a$; FL ou BE, x; LM, y; les triangles ſemblables FEN, FLM, & la proprieté du cercle donneront $FL(x).LM(y) :: FE.EN :: EN(\sqrt{2ax - xx}).EB(x)$. D'où l'on tire $yy = \frac{x^3}{2a-x}$, dont la difference eſt $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{2a-x^2}$. Et partant $LO^* \left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{yy \times \overline{2a-x^2}}{3axx - x^3}$ $= \frac{2ax-xx}{3a-x}$, en mettant pour yy ſa valeur $\frac{x^3}{2a-x}$. *Art. 9.

PROPOSITION IX.

Problême.

29. SOIENT *deux lignes courbes* ANB, CPD, *& une ligne droite* FKT, *ſur leſquelles ſoient marqués des points fixes* A, C, F; *ſoit de plus une autre ligne courbe* EMG *telle qu'ayant mené par un de ſes points quelconques* M *la droite* FMN, *&* MP *parallele à* FK; *la relation de l'arc* AN *à l'arc* CP *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur la courbe* EG *mener la tangente* MT. Fig. 15.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallele à FM, & par le point donné M les droites MRK, MOH paralleles aux tangentes en P & en N, on tirera $FmOn$ infiniment proche de FMN & mRp parallele à MP.

Cela poſé, ſi l'on nomme les connues FM, s; FN, t; MK, u; CP, x; AN, y, (donc Pp ou $MR = dx$, $Nn = dy$) les triangles ſemblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront $FN(t).FM(s) :: Nn(dy).MO = \frac{sdy}{t}$.

Et $MR(dx)$. $MO\left(\frac{tdy}{t}\right)$ :: $MK(u)$. $MH = \frac{tudy}{tdx}$. Or par le moyen de la difference de l'équation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui ſeront tous affectés par dx, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{tudy}{tdx}$, les dx ſe détruiront; & partant la valeur de MH ſera exprimée en termes entiérement connus. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit mené MH parallele à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : ſoit tirée HT parallele à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M ſoit menée la tangente cherchée MT.

EXEMPLE.

FIG. 16. 30. SI l'on veut que la courbe ANB ſoit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F, que la courbe CPD ſoit le rayon APF perpendiculaire ſur la droite $FKGQTB$, & que l'arc $AN(y)$ ſoit toujours à la droite AP (x) comme le quart de cercle $ANB(b)$ au rayon $AF(a)$; la courbe EMG deviendra la Quadratrice AMG de *Dinoſtrate*, & l'on aura $MH\left(\frac{tudy}{tdx}\right) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$, puiſque FP ou $MK(u) = a - x$, & $FN(t) = a$. Mais l'analogie ſuppoſée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de MH à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{bdx}{a}$, on trouvera $MH = \frac{bs - ys}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée MH perpendiculaire ſur FM, & égale à l'arc MQ décrit du centre F, & ſoit tirée HT parallele à FM; je dis que la ligne MT ſera tangente en M. Car à cauſe des ſecteurs ſemblables FNB, FMQ, l'on aura $FN(a)$. $FM(s)$ :: $NB(b-y)$. $MQ = \frac{bs - ys}{a}$.

COROLLAIRE.

FIG. 17. 31. SI l'on veut déterminer le point G où la quadratrice AMG rencontre le rayon FB, on imaginera un autre rayon Fgb infiniment proche de FGB; & en menant gf parallele à FB, la propriété de la quadratrice

& les triangles ſemblables FBb, gfF, réctangles en B & en f, donneront $AB.AF :: Bb.Ff :: FB$ ou Ab ou gf ou FG. D'où l'on voit que ſi l'on prend une troiſiéme proportionnelle au quart de cercle AB & au rayon AF, elle ſera égale à FG, c'eſt à dire que $FG = \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu lieu d'abréger la conſtruction des tangentes.

Car menant TE parallele à MH, les triangles ſemblables FMK, FTE donneront $MK\ (a-x).MF(s) :: ET$ ou $MH\ (\frac{bs-y}{a}).FT = \frac{bss-yss}{aa-ax} = \frac{bss}{aa}$. en mettant pour x ſa valeur $\frac{ay}{b}$, & diviſant enſuite le tout par $b-y$; d'où il eſt clair que la ligne FT eſt troiſiéme proportionnelle à FG & à FM. FIG. 16.

PROPOSITION X.

Problême.

32. SOIT *une ligne courbe* AMB *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *aux foyers* F, G, H, *&c. les droites* MF, MG, MH, *&c. leur relation ſoit exprimée par une équation quelconque : & ſoit propoſé de mener du point donné* M *la perpendiculaire* MP *ſur la tangente en ce point.* FIG. 18.

Ayant pris ſur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit, & mené les droites FRm, GmS, HmO, on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO; enſuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E, d'où l'on abaiſſera ſur MP les perpendiculaires CL, DK, EI. Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles réctangles MRm, MLC ſont ſemblables; car en ôtant des angles droits LMm, RMC l'angle commun LMR, les reſtes RMm, LMC ſeront égaux, & de plus ils ſont réctangles en R & L. On prouvera de même que les triangles réctangles MSm & MKD, MOm & MIE ſont ſemblables. Partant, puiſque l'hypothenuſe Mm eſt commune aux petits triangles MRm, MSm, MOm, & que les

hypothenuſes MC, MD, ME des triangles MLC, MKD, MIE ſont égales entr'elles; il s'enſuit que les perpendiculaires CL, DK, EI ont le même rapport entr'elles que les différences Rm, Sm, Om.

2°. Que les lignes, qui partent des foyers ſitués du même côté de la perpendiculaire MP, croiſſent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. FM croiſt de ſa différence Rm, pendant que les autres GM, HM diminuent des leurs Sm, Om.

Si l'on ſuppoſe à préſent, pour fixer ſes idées, que l'équation qui exprime la relation des droites FM (x), GM (y), HM (z), ſoit $ax + xy - zz = o$, dont la différence eſt $adx + ydx + xdy - 2zdz = o$; Il eſt évident que la la tangente en M (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit côté Mm du poligone que l'on conçoit * compoſer la courbe AMB) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ſes points quelconques m des paralleles mR, mS, mO aux droites FM, GM, HM, terminées en R, S, O par des perpendiculaires MR, MS, MO à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $\overline{a+y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = o$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de Rm, Sm, Om leurs proportionnelles CL, DK, EI) que la perpendiculaire MP à la courbe doit être placée en ſorte que $a + y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$. Ce qui donne cette conſtruction.

* *Art.* 3.

FIG. 18. 19. Que l'on conçoive que le point C ſoit chargé du poids $a + y$ qui multiplie la différence dx de la droite FM ſur laquelle il eſt ſitué, & de même le point D du poids x, & le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parceque le terme $-2zdz$ eſt négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite MP qui paſſe par le commun centre de péſanteur des poids ſuppoſez en C, D, E, ſera la perpendiculaire requiſe. Car il eſt clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui paſſe par le centre de peſanteur de pluſieurs poids, les ſépare en ſorte que les poids d'une part multipliés chacun par ſa diſtance de cette droite, ſont préciſément égaux aux poids

de l'autre part multipliés auſſi chacun par ſa diſtance de cette même droite. Donc poſant le cas que x croiſſant, y & z croiſſent auſſi, c'eſt à dire que les foyers F, G, H tombent du même côté de MP, comme l'on ſuppoſe toujours en prenant la différence de l'équation donnée ſelon les regles preſcrites; il s'enſuit que la ligne MP laiſſera d'une part les poids en C & D, & de l'autre le poids en E, & qu'ainſi l'on aura $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - z \times EI = o$, qui étoit l'équation à conſtruire. FIG. 19.

Or je dis maintenant que puiſque la conſtruction eſt bonne dans ce cas, elle le ſera auſſi dans tous les autres; car ſuppoſant par éxemple que le point M change de ſituation dans la courbe en ſorte que x croiſſant, y & z diminuent, c'eſt à dire que les foyers G, H paſſent de l'autre côté de MP, il s'enſuit 1°. * Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les ſignes des termes affectés par dy, dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI; de ſorte que l'équation à conſtruire ſera dans ce nouveau cas $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + z \times EI = o$. 2°. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP, & qu'ainſi l'on aura par la proprieté du centre de peſanteur $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + z \times EI = o$, qui eſt l'équation à conſtruire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas poſſibles, il s'enſuit, &c. FIG. 18. * *Art.* 81

Il eſt évident que le même raiſonnement ſubſiſtera toujours tel que ſoit le nombre des foyers, & telle que puiſſe être l'équation donnée; de ſorte que l'on peut énoncer ainſi la conſtruction générale.

Soit priſe la différence de l'équation donnée dont je ſuppoſe que l'un des membres ſoit zero, & ſoit décrit à diſcrétion du centre M un cercle CDE qui coupe les droites ME, MG, MH aux points C, D, E, dans leſquels ſoient conçus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes ſur leſquelles ils ſont ſitués. Je dis que la ligne MP qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera la perpendiculaire requiſe. Il eſt à remarquer que ſi l'un des

poids eſt négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers F, G, H ſoient des lignes droi-
FIG. 20. tes ou courbes ſur qui les droites MF, MG, MH tombent à angles droits, la même conſtruction aura toujours lieu. Car menant du point m pris infiniment près de M les perpendiculaires mf, mg, mh ſur les foyers, & du point M les petites perpendiculaires MR, MS, MO ſur ces lignes; il eſt clair que Rm ſera la difference de MF, puiſque les droites MF, Rf étant perpendiculaires entre les paralleles Ff, MR, elles ſeront égales, & de même que Sm eſt la différence de MG, & Om celle de MH; & on prouvera enſuite tout le reſte comme ci-deſſus.

FIG. 21. On peut encore concevoir que les foyers F, G, H ſoient tous ou en partie des lignes courbes qui ayent des commencemens fixes & invariables aux points F, G, H, & que la ligne courbe AMB ſoit telle qu'ayant mené par éxemple d'un de ſes points quelconques M les tangentes MV, MX & la droite MG; la relation des lignes mixtilignes FVM, HXM & de la droite GM ſoit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point m pris infiniment près de M la tangente mu, il eſt clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point V (puiſqu'elle n'eſt que la continuation du petit arc Vu conſidéré comme une petite droite), & partant que ſi l'on décrit du centre V le petit arc de cercle MR; Rm ſera la différence de la ligne mixtiligne FVM qui devient $FVuRm$. Et tout le reſte ſe démontrera comme ci-devant.

M. Tſchirnhaus *a donné la premiere idée de ce Problème dans ſon Livre de la Medecine de l'eſprit; M.* Fatio *en a trouvé enſuite une ſolution très ingénieuſe qu'il a fait inſerer dans les Journaux d'Hollande : mais la maniere dont ils l'ont conçu, n'eſt qu'un cas particulier de la conſtruction générale que je viens de donner.*

EXEMPLE I.

33. SOIT $axx + byy + czz - f^2 = o$ (les droites a, b, c, f ſont données) dont la difference eſt $axdx + bydy + czdz = o$. C'eſt pourquoi concevant en C le poids ax, en D le poids by, & en E le poids cz, c'eſt à dire des poids qui ſoient entr'eux comme ces réctangles; la ligne MP qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera perpendiculaire à la courbe au point M. FIG. 22.

Mais ſi l'on mene FO parallele à CL, & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité, les triangles ſemblables MCL, MFO donneront $FO = x \times CL$; & de même menant GR parallele à DK, & HS parallele à EI, on trouvera que $GR = y \times DK$ & $HS = z \times EI$: de ſorte qu'en imaginant aux foyers F, G, H les poids a, b, c; la ligne MP, qui paſſe par le centre de peſanteur des poids ax, by, cz ſuppoſez en C, D, E, paſſera auſſi par le centre de peſanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre eſt un point fixe, puiſque les poids en F, G, H, ſçavoir a, b, c, ſont des droites conſtantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que ſe trouve le point M. D'où il ſuit que la courbe AMB doit être telle que toutes ſes perpendiculaires ſe coupent dans le même point, c'eſt à dire qu'elle ſera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une proprieté très remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainſi.

S'il y a ſur un même plan autant de poids a, b, c, &c. que l'on voudra, ſitués en F, G, H, &c. & que l'on décrive de leur commun centre de peſanteur un cercle AMB; je dis qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M, les droites MF, MG, MH, &c. la ſomme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, ſera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. SOIT la courbe AMB telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M au foyer F qui eſt un point FIG. 23.

fixe la droite MF, & au foyer G qui eſt une ligne droite la perpendiculaire MG; le rapport de MF à MG ſoit toujours le même que de la donnée a à la donnée b.

Ayant nomme FM, x; MG, y; on aura $x . y :: a . b$, & partant $ay = bx$ dont la difference eſt $ady - bdx = o$. C'eſt pourquoi concevant en C pris au delà de M par rapport à F le poids b, & en D (à pareille diſtance de M) le poids a, & menant par leur centre commun de peſanteur la ligne MP; elle ſera la perpendiculaire requiſe.

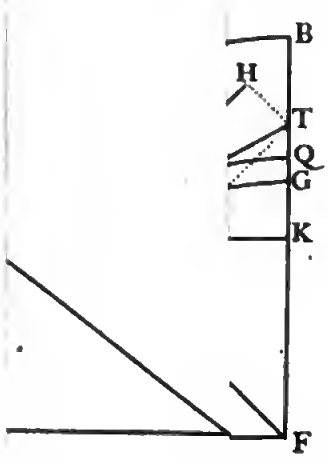
Il eſt clair par le principe de la balance, que ſi l'on diviſe la corde CD au point P en ſorte que $CP . DP :: a . b$; le point P ſera le centre commun de peſanteur des poids ſuppoſés en C & D.

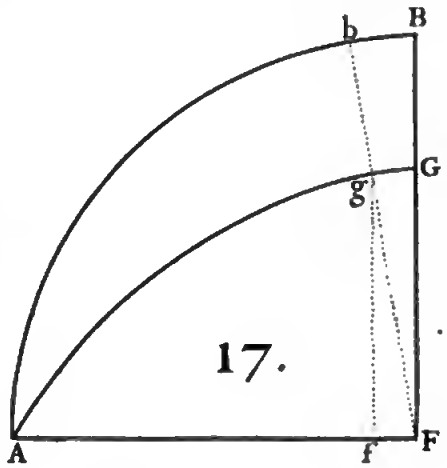
La courbe AMB eſt une ſection conique, ſçavoir une Parabole lorſque $a = b$, une Hyperbole lorſque a ſurpaſſe b, & enfin une Ellipſe lorſqu'il eſt moindre.

EXEMPLE III.

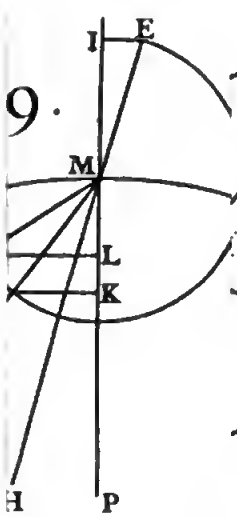
FIG. 24. 35. SI après avoir attaché les extrémités d'un fil $FZVMGMXYH$ en F & en H, & avoir fiche une petite pointe en G, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un ſtile placé en M, en ſorte que les parties FZV, HYX ſoient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H, que la partie MG ſoit double, c'eſt à dire qu'elle ſoit repliée en G, & que les choſes demeurant en cet état l'on faſſe mouvoir le ſtyle M; il eſt clair qu'il décrira une courbe AMB. Il eſt queſtion de mener d'un point donné M ſur cette courbe la perpendiculaire MP, la poſition du fil qui ſert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil ſont toujours tangentes en V & X, & que ſi l'on nomme les lignes mixtilignes $FZVM, x$; $HYXM, z$; la droite MG, y; & une ligne droite priſe égale à la longueur du fil, a; l'on aura toujours $x + 2y + z = a$: d'où je connois que la courbe AMB eſt compriſe dans la conſtruction générale. C'eſt pourquoi prenant la difference $dx + 2dy + dz = o$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids

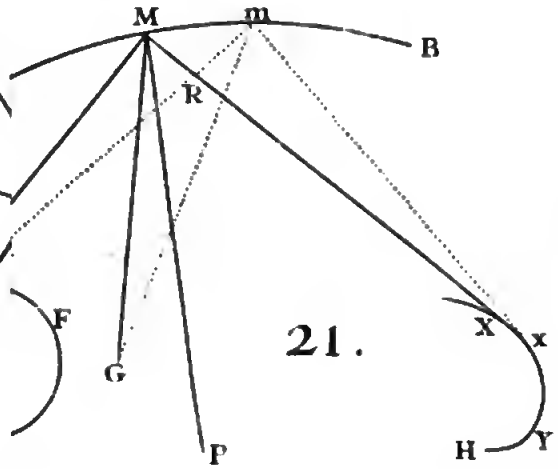




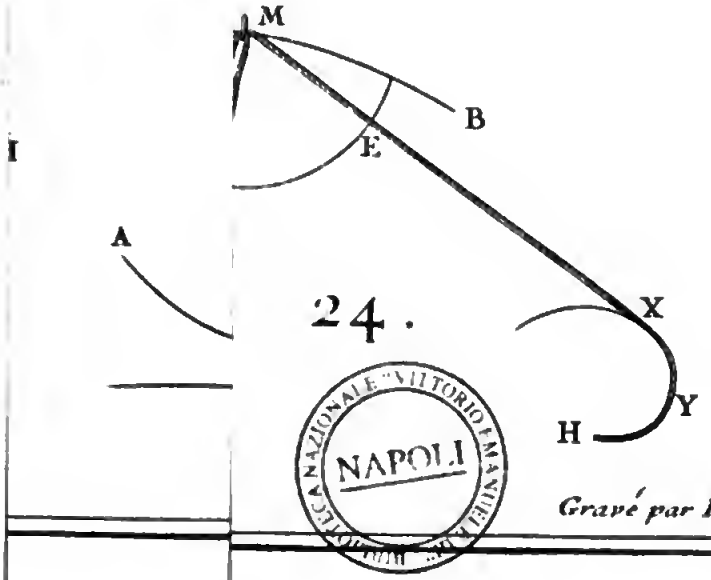
17.



9.



21.



24.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE" NAPOLI

Gravé par Berey

poids *r*; je dis que la ligne *MP*, qui paſſe par le centre commun de peſanteur de ces poids, ſera la perpendiculaire requiſe.

PROPOSITION XI.

Problême.

36. SOIENT *deux lignes quelconques* APB, EQF *dont l'on ſçache mener les tangentes* PG, QH; *& ſoit une ligne droite* PQ *ſur laquelle ſoit marqué un point* M. *Si l'on conçoit que les extrémités* P, Q *de cette droite gliſſent le long des lignes* AB, EF, *il eſt clair que le point* M *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CD. *Il eſt queſtion de mener d'un point donné* M *ſur cette courbe la tangente* MT. FIG. 25.

Ayant imaginé que la droite mobile *PMQ* ſoit parvenue dans la ſituation infiniment proche *pmq*, on tirera les petites droites *PO*, *MR*, *QS* perpendiculaires ſur *PQ*, ce qui formera les petits angles rectangles *pOP*, *mRM*, *qSQ*; & ayant pris *PK* égale à *MQ*, on menera la droite *HKG* perpendiculaire ſur *PQ*, & l'on prolongera *OP* en *T*, où je ſuppoſe qu'elle rencontre la tangente cherchée *MT*. Cela poſé, il eſt clair que les petites droites *Op*, *Rm*, *Sq* ſeront égales entr'elles, puiſque par la conſtruction *PM* & *MQ* ſont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues *PM* ou *KQ*, *a*; *MQ* ou *PK*, *b*; *KG*, *f*; *KH*, *g*; & la petite droite *Op* ou *Rm* ou *Sq*, *dy*; les triangles ſemblables *PKG* & *pOP*, *QKH* & *qSQ* donneront $PK\,(b).\,KG\,(f) :: pO\,(dy).\,OP = \frac{fdy}{b}$. Et $QK\,(a).\,KH\,(g) :: qS\,(dy).\,SQ = \frac{gdy}{a}$. Or l'on ſçait par la Geometrie commune que $MR = \frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a+b}$. Ainſi les triangles ſemblables *mRM*, *MPT* donneront $mR\,(dy).\,RM\,(\frac{fdy+gdy}{a+b}) :: MP\,(a).\,PT = \frac{af+ag}{a+b}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 26. 37. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ *qui ayent pour axes les droites* BC, ED *qui s'entre-coupent à angles droits au point* A; *& ſoit une ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *les droites* MGQ, MPN *parallele à* AB, AE; *la relation des eſpaces* EGQF, (*le point E eſt un point fixe donné ſur la droite* AE, *& la ligne* EF *eſt parallele à* AC) APND, *& les droites* AP, PM, PN, GQ, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il eſt queſtion de mener d'un point donné* M *ſur la courbe* LM, *la tangente* MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x; PM ou AG, y; PN, u; GQ, z; l'eſpace $EGQF$, s; l'eſpace $APND$, t; & les ſoutangentes données PH, a; GK, b; l'on aura Pp ou NS ou $MR = dx$, Gg ou Rm ou $OQ = -dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$ à cauſe des triangles ſemblables HPN; NSn; $Oq = dz = -\frac{zdy}{b}$, $NPpn = dt = udx$, & $QGgq = ds = -zdy$; où l'on doit obſerver que les valeurs de Rm & Sn ſont négatives, parceque AP (x) croiſſant, PM (y) & PN (u) diminuent. Cela poſé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt, ds, du, dz leurs valeurs udx, $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx, ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. SOIT $s + zz = t + ux$, on aura en prenant les différences $ds + 2zdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds, dt, dz, du leurs valeurs, on trouvera $-zdy - \frac{2zzdy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aubz}{bux - 2abu}$.

EXEMPLE II.

39. SOIT $s = t$, donc $ds = dt$, c'eſt à dire $-zdy = udx$; & partant $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -\frac{yz}{u}$. Or comme cette quantité eſt négative, il s'enſuit* que l'on doit prendre le point T du côté oppoſé au point A origine des x. Si l'on ſuppoſe que la ligne FQ ſoit une hyperbole qui ait pour aſymptotes les droites AC, AE, en ſorte que $GQ\,(z) = \frac{cc}{y}$, & que la ligne BND ſoit une droite parallele à AB, de maniere que $PN\,(u)$ ſoit par tout égale à la droite donnée c; il eſt clair que la courbe LM a pour aſymptote la droite AB, & que ſa ſoutangente $PT\left(-\frac{yz}{u}\right) = -c$: c'eſt à dire qu'elle demeure par tout la même. * *Art.* 10.

La courbe LM eſt appellée dans ce cas *Logarithmique*.

PROPOSITION XIII.

Problême.

26. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ *qui ayent pour axe la même droite* BA, *ſur laquelle ſoient marqués deux points fixes* A, E; *ſoit une troiſiéme ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené par un de ſes points quelconques* M *la droite* AN, *décrit du centre* A *l'arc de cercle* MG, *& tiré* GQ *parallele à* EF *perpendiculaire ſur* AB; *la relation des eſpaces* EGQF (s), ANB (t), *& des droites* AM *ou* AG (y), AN (z), GQ (u), *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné* M *ſur la courbe* LM *la tangente* MT. FIG. 27.

Après avoir mené la droite ATH perpendiculaire ſur AMN, ſoit imaginé une autre droite Amn infiniment proche de AMN, un autre arc mg, une autre perpendiculaire gq, & décrit du centre A le petit arc NS: on nommera les ſoutangentes données AH, a; GK, b; & on aura Rm ou $Gg = dy$, $Sn = dz$; les triangles ſemblables HAN & NSn, $KG\mathcal{Q}$

& QOq, donneront auſſi $SN = \frac{adz}{z}$, $Oq = -du = \frac{udy}{b}$, $GQqg = -ds = udy$, ANn ou $AN \times \frac{1}{2} NS = -dt = \frac{1}{2} adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la difference de l'equation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera une valeur de dz en dy. Or à cauſe des ſecteurs & des triangles ſemblables ANS & AMR, mRM & MAT, on trouve $AN(z) . AM(y) :: NS\left(\frac{adz}{z}\right) . MR = \frac{aydz}{zz}$. Et $mR(dy) . RM\left(\frac{aydz}{zz}\right) :: AM(y) . AT = \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz ſa valeur en dy, les differences ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente cherchée AT ſera exprimée en termes entiérement connus. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

41. SOIT $uy - s = zz - t$, dont la différence eſt $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la ſubſtitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve $AT = \frac{4abuyy - 2auy^3}{4bz^3 + abzz}$.

EXEMPLE II.

42. SOIT $s = zt$, donc $ds = zdt$, c'eſt à dire $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant $AT\left(\frac{ayydz}{zzdy}\right) = \frac{uyy}{zz}$.

Si la ligne BN eſt un cercle qui ait pour centre le point A, & pour rayon la droite $AB = AN = c$, & que FQ ſoit une hyperbole telle que $GQ(u) = \frac{ff}{y}$; il eſt clair que la courbe LM fait une infinité de retours au tour du centre A avant que d'y parvenir (puiſque l'eſpace $FEGQ$ devient infini lorſque le point G tombe en A), & que $AT = \frac{ffy}{cc}$. D'où l'on voit que la raiſon de AM à AT eſt conſtante; & partant que l'angle AMT eſt par tout le même.

La courbe LM eſt appellée en ce cas *Logarithmique ſpirale.*

PROPOSITION XIV.

Problême.

43. SOIENT *sur un même plan deux courbes quelconques* AMD, BMC *qui se touchent en un point* M, *& soit sur le plan de la courbe* BMC *un point fixe* L. *Si l'on conçoit à présent que la courbe* BMC *roule sur la courbe* AMD *en s'y appliquant continuellement en sorte que les parties révolues* AM, BM *soient toujours égales entr'elles ; il est visible que le plan* BMC *emportant le point* L, *ce point décrira dans ce mouvement une espece de roulette* ILK. *Cela posé, je dis que si l'on mene dans chaque différente position de la courbe* BMC *(du point décrivant* L *au point touchant* M) *la droite* LM ; *elle sera perpendiculaire à la courbe* ILK. FIG. 28.

Car imaginant sur les deux courbes *AMD*, *BMC* deux parties *Mm*, *Mm* égales entr'elles & infiniment petites, on les pourra considérer *comme deux petites droites qui font au point *M* un angle infiniment petit. Or afin que le petit côté *Mm* de la courbe ou poligone *BMC* tombe sur le petit côté *Mm* du poligone *AMD*, il faut que le point *L* décrive autour du point touchant *M* comme centre un petit arc *Ll*. Il est donc évident que ce petit arc fera partie de la courbe *ILK* ; & par conséquent que la droite *ML*, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur la courbe *ILK* au point *L*. Ce qu'il falloit prouver. * *Art.* 3.

PROPOSITION XV.

Problême.

44. SOIT *un angle rectiligne quelconque* MLN, *dont les côtés* LM, LN *touchent deux courbes quelconques* AM, BN. *Si l'on fait glisser ces côtés autour de ces courbes, en sorte qu'ils les touchent continuellement ; il est clair que le sommet* L *décrira dans ce mouvement une courbe* ILK. *Il est question de mener une perpendiculaire* LC *sur cette courbe, la position de l'angle* MLN *etant donnée.* FIG. 29.

Soit décrit un cercle qui paſſe par le ſommet *L*, & par les points touchans *M*, *N*; ſoit menée par le centre *C* de ce cercle la droite *CL*: je dis qu'elle ſera perpendiculaire à la courbe *ILK*.

Car conſidérant les courbes *AM*, *BN* comme des poligones d'une infinité de côtés tels que *Mm*, *Nn*; il eſt évident que ſi l'on fait gliſſer les côtés *LM*, *LN*, de l'angle rectiligne *MLN*, qu'on ſuppoſe demeurer toujours le même, autour des points fixes *M*, *N*, (on conſidére les tangentes *LM*, *LN* comme la continuation des petits côtés *Mf*, *Ng*) juſqu'à ce que le côté *LM* de l'angle tombe ſur le petit côté *Mm* du poligone *AM*, & l'autre côté *LN* ſur le petit côté *Nn* du poligone *BN*; le ſommet *L* décrira une petite partie *Ll* de l'arc de cercle *MLN*, puiſque par la conſtruction cet arc eſt capable de l'angle donné *MLN*. Cette petite partie *Ll* ſera donc commune à la courbe *ILK*; & par conſequent la droite *CL*, qui lui eſt perpendiculaire, ſera auſſi perpendiculaire ſur cette courbe au point *L*. Ce qu'il falloit demontrer.

PROPOSITION XVI.

Problême.

FIG. 30. 45. SOIT ABCD *une corde parfaitement fléxible à laquelle ſoient attachés différens poids* A, B, C, *&c. qui ayent entr'eux tels intervales* AB, BC, *&c. que l'on voudra. Si l'on traine cette corde ſur un plan horizontal par l'extrémité* D, *le long d'une courbe donnée* DP; *il eſt clair que ces poids ſe diſpoſeront en ſorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront enſuite des courbes* AM, BN, CO, *&c. On demande la maniére d'en tirer les tangentes, la poſition de la corde* ABCD *étant donnée avec la grandeur des poids.*

Dans le premier inſtant que l'extrémité *D* avance vers *P*, les poids *A*, *B*, *C*, décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés *Aa*, *Bb*, *Cc* des poligones qui compoſent les courbes *AM*, *BN*, *CO*; & par conſéquent il ne faut pour en mener les tangentes *AB*, *BG*, *CK*, que déterminer la

direction des poids *A*, *B*, *C* dans ce premier inſtant, c'eſt à dire la poſition des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids *A* eſt tiré dans ce premier inſtant ſuivant la direction *AB*, & comme il n'y a aucun obſtacle qui s'oppoſe à cette direction, puiſqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit ſuivre ; & partant la droite *AB* ſera la tangente en *A* de la courbe *AM*.

2°. Que le poids *B* eſt tiré ſuivant la direction *BC*; mais parcequ'il traîne après lui le poids *A* qui n'eſt pas dans cette direction, & qui doit par conſequent y apporter quelque changement, le poids *B* n'aura pas ſa direction ſuivant *BC*, mais ſuivant une autre droite *BG*, dont il faut trouver la poſition. Ce que je fais ainſi.

Je décris ſur *BC* comme diagonale le réctangle *EF*, dont le côté *BF* eſt ſur *AB* prolongée, & ſuppoſant que la force avec laquelle le poids *B* eſt tiré ſuivant *BC*, s'exprime par *BC*; il eſt viſible par les regles de la Mécanique, que cette force *BC* ſe peut partager en deux autres *BE* & *BF*, c'eſt à dire que le poids *B* étant tiré ſuivant la direction *BC* par la force *BC*, c'eſt la même choſe que s'il étoit tiré en même temps par la force *BE* ſuivant la direction *BE*, & par la force *BF* ſuivant la direction *BF*. Or le poids *A* ne s'oppoſe point à la direction *BE*, puiſqu'elle lui eſt perpendiculaire ; & par conſéquent la force *BE* ſuivant cette direction demeure toute entiere : mais il s'oppoſe avec toute ſa peſanteur à la direction *BF*. Afin donc que le poids *B* avec la force *BF* vainque la réſiſtance du poids *A*, il faut que cette force ſe diſtribue dans ces poids à proportion de leurs maſſes ou grandeurs : c'eſt pourquoi ſi l'on diviſe *EC* au point *G*, en ſorte que *CG* ſoit à *GE* comme le poids *A* au poids *B* ; il eſt clair que *EG* exprimera la force reſtante avec laquelle le poids *B* tend à ſe mouvoir ſuivant la direction *BF*, après avoir vaincu la réſiſtance du poids *A*. Il eſt donc évident que le poids *B* eſt tiré en même temps par la force *BE* ſuivant la direction *BE*, & par la force *EG* ſuivant la direction

BF ou EC; & partant qu'il tendra à aller par BG avec la force BG: c'eſt à dire que BG ſera ſa direction, & par conſéquent tangente en B de la courbe BN.

3°. Pour avoir la tangente CK, je forme ſur CD comme diagonale le réctangle HI, dont le côté CI eſt ſur BC prolongée; & je vois que le poids B ne réſiſte point à la force CH avec laquelle le poids C eſt tiré ſuivant la direction CH, mais bien à la force CI avec laquelle il eſt tiré ſuivant la direction CI, & de plus que le poids A réſiſte auſſi à cette force. Pour ſçavoir de combien, je tire AL perpendiculaire ſur CB prolongée du côté de B, & je remarque que ſi AB exprime la force avec laquelle le poids A eſt tiré ſuivant la direction AB, BL exprimera celle avec laquelle ce même poids A eſt tiré ſuivant la direction BC; de ſorte que le poids C avec la force CI doit vaincre le poids entier B, & de plus une partie du poids A qui eſt à ce poids A comme BL eſt à BA, ou BF à BC. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC} . C :: DK . KH$, il eſt clair que CK ſera la direction du poids C, & par conſéquent la tangente en C de la troiſiéme courbe CO.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même maniére la tangente de la quatriéme, cinquiéme, &c. Et ſi l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art. 36.

SECTION III.

Uſage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où ſe réduiſent les queſtions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe *MDM* dont les appliquées *PM*, *ED*, *PM* ſoient paralleles entr'elles; & qui ſoit telle que la coupée *AP* croiſſant continuellement, l'appliquée *PM* croiſſe auſſi juſqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue juſqu'à un certain point *E*, après lequel elle croiſſe. Cela poſé, FIG. 31. 32. 33. 34.

La ligne *ED* ſera nommée *la plus grande* ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propoſe une quantité telle que *PM*, qui ſoit compoſée d'une ou de pluſieurs indéterminées telles que *AP*, laquelle *AP* croiſſant continuellement, cette quantité *PM* croiſſe auſſi juſqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour *AP*, une valeur *AE* telle que la quantité *ED* qui en eſt compoſée, ſoit plus grande ou moindre que toute autre quantité *PM* ſemblablement formée de *AP*. Cela s'appelle une queſtion *De maximis & minimis*.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. LA *nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED *ſoit la plus grande ou la moindre de ſes ſemblables* PM.

Lorſque *AP* croiſſant, *PM* croît auſſi; il eſt évident* que ſa difference *Rm* ſera poſitive par rapport à celle de *AP*; & qu'au contraire lorſque *PM* diminue, la coupée *AP* croiſ- * *Art.* 8. 10.

ſant toujours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive negative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zero; ſçavoir par le zero lorſqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la difference d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe MDM etant donnée, on trouvera * une valeur de Rm, laquelle étant égalee d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de AE dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

* *Sect. 1. on 2.*

REMARQUE.

Fig. 31. 32. 47. LA tangente en D eſt parallele à l'axe AB lorſque la difference Rm devient nulle dans ce point; mais lorſqu'elle devient infinie, la tangente ſe confond avec l'appliquée ED. D'où l'on voit que la raiſon de mR à RM, qui exprime celle de l'appliquée à la ſoutangente, eſt nulle ou infinie ſous le point D.

Fig. 33. 34.

On conçoit aiſément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative ſans paſſer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorſqu'elle augmente, elle doive paſſer par l'infini. C'eſt pourquoi pour aider l'imagination, ſoient entendues des tangentes aux points M, D, M; il eſt clair dans les courbes où la tangente en D eſt parallele à l'axe AB, que la ſoutangente PT augmente continuellement à meſure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorſque AP ſurpaſſe AE, la ſoutangente PT devient * négative de poſitive qu'elle étoit, ou au contraire.

Fig. 31. 32.

* *Art.* 10.

EXEMPLE I.

Fig. 35. 48. SUPPOSONS que $x^3+y^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences $3xxdx+3yydy=axdy+aydx$,

& $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = o$ lorſque le point P tombe ſur le point cherchée E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes ſes ſemblables PM.

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero ; mais parceque cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = o$; d'où l'on tire $x = a$, qui eſt la valeur cherchée de AE. Fig. 33.

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie-roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Fig. 36.

Ayant mené à diſcretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x ; PN, z ; l'arc AN, u ; & les données ANB, a ; BF, b ; CA ou CN, c ; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB\,(a) . BF\,(b) :: AN\,(u) . NM = \frac{bu}{a}$: Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & ſa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorſque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles rectangles NSn, NPC ſont ſemblables ; car ſi l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les reſtes SNn, PNC ſeront égaux. Et partant $CN\,(c) . CP$

$(c - x) :: Nn\,(du).\ Sn\,(dz) = \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui eſt en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il eſt donc évident que ſi l'on prend CE du côté de B quatriéme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la baſe BF, & au rayon CB, le point E ſera celui qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

Fig. 35. 51. COUPER la ligne donnée AB en un point E, en ſorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, ſoit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

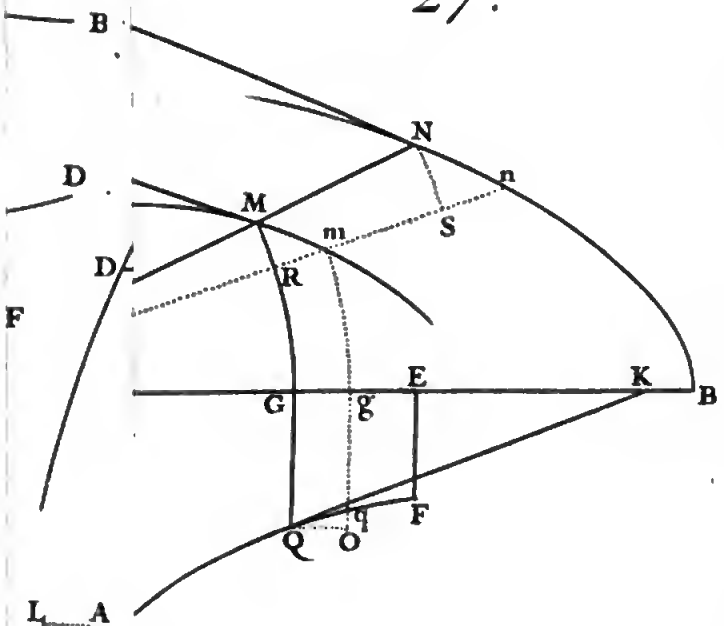
Ayant nommé l'inconnue AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée $MP\ (y)$ à la coupée $AP\ (x)$ ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED ſoit la plus grande de toutes ſes ſemblables PM; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire $AE\ (x) = \frac{2}{3}a$.

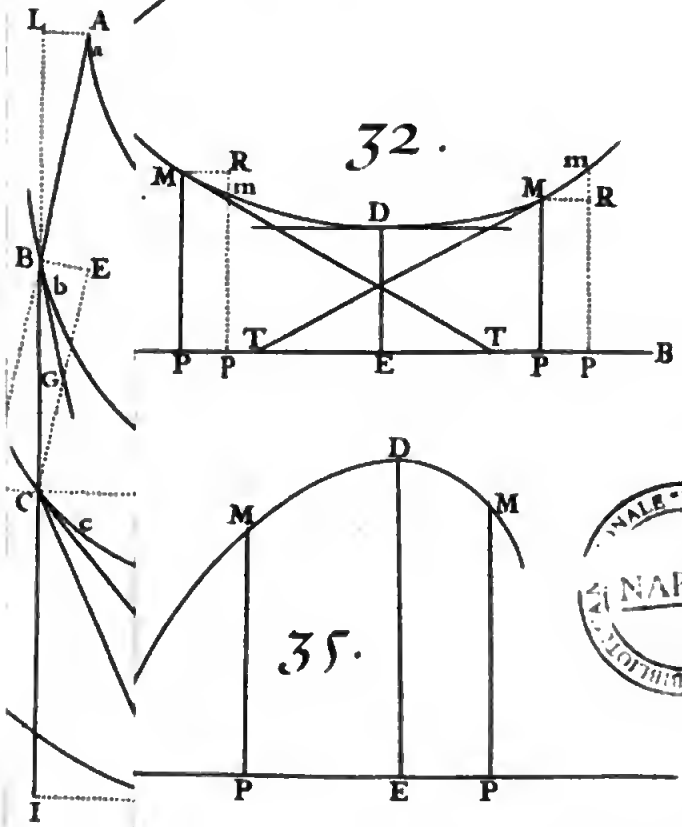
Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a - x}^n$ ſoit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit ſoit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a - x}^n - n\overline{a - x}^{n-1} dx \times x^m = o$, d'où en diviſant par $x^{m-1} \times \overline{a - x}^{n-1} dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & $AE\ (x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le Problême ainſi.

Fig. 37. Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E, en ſorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ ſoit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM ſera

27.





Gravé par Berey

NAPOLI

$\frac{xx}{x-a} = y$, dans laquelle ſi l'on ſuppoſe $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC ſera $\frac{aa}{0}$, c'eſt à dire infinie ; & ſuppoſant x infinie, l'on aura $y = x$, c'eſt à dire que l'appliquée ſera auſſi infinie.

Si $m = 1$, & $n = -2$, l'on aura $AE = -a$; d'où il ſuit que l'on doit énoncer le Problême alors en cette ſorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E, en ſorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ ſoit plus grande que toute autre quantité ſemblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. FIG. 38.

EXEMPLE V.

52. LA ligne droite AB étant diviſée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper ſa partie du milieu CF au point E, en ſorte que le rapport du réctangle $AE \times EB$ au réctangle $CE \times EF$ ſoit moindre que tout autre rapport formé de la même maniére. FIG. 39.

Ayant nommé les données AC, a ; CF, b ; CB, c ; & l'inconnue CE, x ; l'on aura $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ ſera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi ſi l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée $PM\,(y)$ à la coupée $CP\,(x)$ ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, la queſtion ſe réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED ſoit la moindre de toutes ſes ſemblables PM. On formera donc (en prenant les différences, & diviſant enſuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, dont l'une des racines réſout la queſtion.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inſcrits

dans un ſphére, déterminer celui qui a la plus grande ſurface convexe.

FIG. 40. La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diametre AB du demi-cercle AFB le point E, en ſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le réctangle $AF \times FE$ ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables $AN \times NP$. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiére autour du diametre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphére, & que les triangles réctangles AEF, APN décriront des cones inſcrits dans cette ſphére, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, ſeront entr'elles comme les réctangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnue $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la proprieté du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera un ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, en ſorte que l'appliquée ED ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = o$, d'où l'on tire $AE\,(x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. ON demande entre tous les Parallélépipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celui qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipede, leur ſomme ſçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trou-

vera en prenant la difference $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = o$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de ſorte que les trois côtés du parallélépipede qui ſatisfait à la queſtion, ſeront le premier b, le ſecond $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, & le troiſiéme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, ſont égaux entr'eux.

EXEMPLE VIII.

55. ON demande préſentement entre tous les Parallélepipedes qui ſont égaux à un cube donné a^3, celui qui a la moindre ſuperficie. FIG. 41.

Nommant x un des côtés inconnus, il eſt clair par l'exemple precédent, que les deux autres côtés ſeront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la ſomme des plans alternatifs qui eſt la moitié de la ſuperficie, ſera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3x}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi ſa difference $-\frac{a^3dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = o$, d'où l'on tire $x = a$; & par conſéquent les deux autres côtes ſeront auſſi chacun $= a$; de ſorte que le cube même donné ſatisfait à la queſtion.

EXEMPLE IX.

56. LA ligne AEB étant donnée de poſition ſur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ſes points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); ſoit donnée une quantité compoſée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la poſition des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en eſt compoſée, ſoit plus grande ou moindre que cette même quantité lorſqu'elle eſt compoſée des droites CP, PF. FIG. 41.

Suppoſons que les lignes CE, EF ayent la poſition requiſe; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM telle qu'ayant mené à diſcrétion PQM perpendiculaire ſur CF, l'appliqué QM exprime la quantité donnée: il eſt clair

que le point *P* tombant au point *E*, l'appliquée *QM* qui devient *OD*, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ſes ſemblables. Il faudra donc que ſa différence ſoit alors égale à zero ou à l'infini : c'eſt pourquoi ſi la quantité donnée eſt par exemple $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = o$, & par conſéquent $du. - dz :: 2z. a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du ; c'eſt à dire que la poſition des droites *CE*, *EF* doit être telle que u croiſſant, z diminue.

Maintenant ſi l'on mene *EG* perpendiculaire à la ligne *AEB*, & d'un de ſes points quelconques *G* les perpendiculaires *GL*, *GI* ſur *CE*, *EF* ; & qu'ayant tiré par le point *e* pris infiniment près de *E*, les droites *CKe*, *FeH*, on décrive des centres *C*, *F* les petits arcs de cercle *EK*, *EH* : on formera les triangles rectangles *ELG* & *EKe*, *EIG* & *EHe*, qui ſeront ſemblables entr'eux ; car ſi l'on ôte des angles droits *GEe*, *LEK* le même angle *LEe*, les reſtes *LEG*, *KEe* ſeront égaux ; on prouvera de même que les angles *IEG*, *HEe* ſeront égaux. On aura donc $GL. GI :: Ke(du). He(-dz) :: 2z. a$. D'où il ſuit que la poſition des droites *CE*, *EF* doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire *EG* ſur la ligne *AEB* ; le ſinus *GL* de l'angle *GEC* ſoit au ſinus *GI* de l'angle *GEF*, comme les quantités qui multiplient dz ſont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. SI l'on veut à préſent que la droite *CE* ſoit donnée de poſition & de grandeur, que la droite *EF* le ſoit de grandeur ſeulement, & qu'il faille trouver ſa poſition, il eſt clair que l'angle *GEC* étant donné, ſon ſinus *GL* le ſera auſſi, & par conſéquent le ſinus *GI* de l'angle cherché *GEF*. Donc ſi l'on décrit un cercle du diametre *EG*, & que l'on porte la valeur de *GI* ſur ſa circonférence de *G* en *I* ; la droite *EF* qui paſſe par le point *I* aura la poſition requiſe.

Soit $au + bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne

ne à EC & à EF, la position de cette derniere sera toujours la même, puisqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par consequent ne change point. Si $a = b$, il est clair que la position de EF doit être sur CE prolongée du côté de E; puisque $GL = GI$, lorsque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB: mais lorsqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG. FIG. 42.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle; trouver sur sa circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible. FIG. 42.

Supposant que le point E soit celui que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG, il est clair qu'elle sera perpendiculaire sur la circonférence AEB; & partant * que les angles FEG, CEG seront égaux entr'eux. Si donc l'on mene EH en sorte que l'angle EHO soit égal à l'angle CEO, & de même EK en sorte que l'angle EKO soit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC; on formera les triangles semblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a; OC, b; OF, c; & les inconnues OD ou LE, x; DE ou OL, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$, & HD $(x - \frac{aa}{b})$. DE (y) :: KL $(y - \frac{aa}{c})$. LE (x). Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui est une équation à une hyperbole que l'on construira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E. * *Art.* 57.

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le tems c, & dans l'autre du FIG. 43.

côté de F l'eſpace b dans le même tems c : on demande par quel point E de la droite AEB il doit paſſer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il eſt poſſible pour parvenir de C en F. Si l'on fait $a . CE(u) :: c . \frac{cu}{a}$. Et $b . EF(z) :: c . \frac{cz}{b}$. Il eſt clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il employe à parcourir EF ; de ſorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{c}$ doit être un *moindre*. D'où il ſuit

* *Art. 56.* * qu'ayant mené EG perpendiculaire ſur la ligne AB ; le ſinus de l'angle GEC doit être au ſinus de l'angle GEF, comme a eſt à b.

Cela poſé, ſi l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH, & qu'on mene ſur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & ſur CF, EF les perpendiculaires GL, GI ; l'on aura $a . b :: GL . GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parceque les triangles rectangles GEL & ECA, GEI & EHD ſont égaux & ſemblables entr'eux, comme il eſt facile à prouver. C'eſt pourquoi ſi l'on nomme l'inconnue AE, x ; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connues AB, f ; AC, g ; BF, h ; les triangles ſemblables EBF, EDH donneront $EB(f - x) . BF(h) :: ED\left(\frac{bx}{a}\right) . DH = \frac{bbx}{af - ax}$. Mais à cauſe des triangles rectangles EDH, EAC, qui ont leurs hypotenuſes EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbbbxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$: De ſorte que ôtant les fractions, & ordonnant enſuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{llllll} aax^4 & - 2aafx^3 & + aaffxx & - 2aafggx & + aaffgg = 0. \\ -bb & + 2bbf & + aagg & & \\ & & - bbff & & \\ & & - bbhh & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniére qui ſuit, ſans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f; AC, g; BF, h; & l'inconnue AE, x; on fera $a . CE (\sqrt{gg+xx}) :: c . \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE. Et de même $b . EF (\sqrt{ff-2fx+xx+hh}) :: c . \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = à un *moindre*; & partant ſa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cvdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$ = o; d'où l'on tire, en diviſant par cdx & en ôtant les incommenſurables, la même égalité que ci devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D ſuſpendu par la corde DFB qui paſſe au deſſus de la poulie F, & qui eſt attachée en B, en ſorte que les points C, B ſont ſitués dans la même ligne horizontale CB. On ſuppoſe que la poulie & les cordes n'ayent aucune peſanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

Il eſt clair par les principes de la Mécanique que le plomb D deſcendra le plus bas qu'il lui ſera poſſible, au deſſous de l'horizontale CB; d'où il ſuit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi nommant les données CF, a; DFB, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura $EF = \sqrt{aa-xx}$, $FB = \sqrt{aa+cc-2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa+cc-2cx} + \sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand*; & partant ſa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$ = o, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, &

diviſant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED paſſe par la poulie F & le plomb D lorſqu'ils ſont en repos.

On pourroit encore réſoudre cette queſtion d'une autre maniére que voici.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*; & partant $dy = dz$. Or il eſt clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant ſi du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire ſur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles ſeront donc égales entr'elles; & par conſéquent les petits triangles réctangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypotenuſe Ff commune, ſeront égaux & ſemblables; d'où l'on voit que l'angle RFf eſt égal à l'angle SFf, c'eſt à dire que le point F doit être tellement ſitué dans la circonference FA, que les angles faits par les droites EF, FB ſur les tangentes en F ſoient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC ſoient égaux,

Cela poſé, ſi l'on mene FH, en ſorte que l'angle FHC ſoit égal à l'angle CFB ou CFD; les triangles CBF, CFH ſeront ſemblables; comme auſſi les triangles réctangles ECF, EFH, puiſque l'angle CFE eſt égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par conſéquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE\,(x - \frac{aa}{c})$. $EF\,(y) :: EF\,(y) . EC\,(x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

FIG. 45. 61. L'ELEVATION du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuſcule.

Soit C le centre de la ſphére; $APTOBHQ$ le meridien; $HDdO$ l'horiſon; $QEeT$ le cercle crépuſculaire parallele

à l'horiſon ; *AMNB* l'équateur ; *FEDG* la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horiſon & du cercle crépuſculaire ; *P* le pole auſtral ; *PEM*, *PDN* des quarts de cercles de déclinaiſon. L'arc *HQ* ou *OT* du méridien compris entre l'horiſon & le cercle crépuſculaire, & l'arc *OP* de l'élevation du pole ſont donnés ; & par conſéquent leurs ſinus droits *CI* ou *FL* ou *QX*, & *OV*. L'on cherche le ſinus *CK* de l'arc *EM* ou *DN* de la déclinaiſon du Soleil lorſqu'il décrit le parallele *ED*.

S'imaginant une autre portion *fedg* d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de *FEDG*, avec les quarts de cercles *Pem*, *Pdn* ; il eſt clair que le temps que le Soleil employe à parcourir l'arc *ED*, devant être un *moindre*, la différence de l'arc *MN* qui en eſt la meſure, & qui devient *mn* lorſque *ED* devient *ed*, doit être nulle ; d'où il ſuit que les petits arcs *Mm*, *Nn*, & par conſéquent les petits arcs *Re*, *Sd*, ſeront égaux entr'eux. Or les arcs *RE*, *SD* étant renfermés entre les mêmes paralleles *ED*, *ed*, ſont auſſi égaux, & les angles en *S* & en *R* ſont droits. Donc les petits triangles réctangles *ERe*, *DSd* (que l'on conſidére comme réctilignes * à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés), ſeront égaux & ſemblables ; & par conſéquent les hypotenuſes *Ee*, *Dd* ſeront auſſi égales entr'elles. * *Art.* 3.

Cela poſé, les droites *DG*, *EF*, *dg*, *ef* communes ſections des plans *FEDG*, *fedg* paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diametres *HO*, *QT*, puiſque les plans de tous ces cercles ſont perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien ; & les petites droites *Gg*, *Ff* ſeront égales entr'elles, puiſque les droites *FG*, *fg* ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera

à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cauſe des cercles *HDO*, *QET*) *CO*. *CG* :: *Dd* ou *Ee*. *DG* — *dg* ou *fe* — *FE* :: *IQ*. *IF* :: *CO* + *IQ* ou *OX*. *CG* + *IF* ou *GL*. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables *CVO*, *CKG*, *FLG*, l'on aura *CO*. *CG* :: *OV*. *GK*. Et *GK*. *GL* :: *CK*. *FL* ou *QX*. Donc *OV*. *CK* :: *OX*. *XQ* :: *XQ*. *XH* par la proprieté du cercle : c'eſt à dire que ſi l'on prend *QX* pour le rayon ou ſinus total dans le triangle rectangle *QXH*, dont l'angle *HQX* eſt de 9 degrés, parceque les Aſtronomes font l'arc *HQ* de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élevation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le temps du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élevation du pole; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.

SECTION IV.

Uſage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement.

COMME l'on ſe ſervira dans la ſuite des différences ſecondes, troiſiémes, &c. il eſt néceſſaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, eſt appellée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien ſa *différence ſeconde*. Ainſi ſi l'on imagine une troiſiéme appliquée *nq* infiniment proche de la ſeconde *mp*, & qu'on mene *mS* parallele à *AB*, & *mH* parallele à *RS*; on appellera *Hn* la *différence de la différence Rm*, ou bien la *différence ſeconde* de *PM*. FIG. 46.

De même ſi l'on imagine une quatriéme appliquée *of* infiniment proche de la troiſiéme *nq*, & qu'on mene *nT* parallele à *AB*, & *nL* parallele à *ST*; on appellera la différence des petites droites *Hn*, *Lo*, la *différence de la différence ſeconde*, ou bien la *différence troiſiéme* de *PM*. Et ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la ſuite chaque différence par un nombre de d *qui en exprime l'ordre ou le genre. Par éxemple, on marquera par* dd *la différence ſeconde ou du ſecond genre; par* ddd, *la différence troiſiéme ou du troiſiéme genre; par* dddd, *la différence quatriéme ou du quatriéme genre, & de même des autres. Ainſi* ddy *exprimera* Hn; dddy, Lo — Hn *ou* Hn — Lo; *&c.*

Quant aux puiſſances de ces différences, on les marquera par des chiffres poſtérieurs mis au deſſus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entiéres. Par éxemple, le quarré, ou le cube de dy *ſera* dy^2, *ou* dy^3; *le quarré, ou le cube de* ddy *ſera* ddy^2, *ou*

ddy^1; *celui de* dddy *ſera* $dddy^2$, *ou* $dddy^1$; *celui de* ddddy *ſera* $ddddy^2$, *ou* $ddddy^1$, *&c.*

COROLLAIRE I.

62. Si l'on nomme chacune des coupées AP, Ap, Aq, Af, x; chacune des appliquées PM, pm, qn, fo, y; & chacune des portions courbes AM, Am, An, Ao, u; il eſt clair que dx exprimera les différences Pp, pq, qf des coupées; dy les différences Rm, Sn, To des appliquées; & du les différences Mm, mn, no des portions de la courbe AMD. Or afin de prendre, par éxemple, la différence ſeconde Hn de la variable PM, il faut imaginer ſur l'axe deux petites parties Pp, pq & ſur la courbe deux autres Mm, mn pour avoir les deux différences Rm, Sn; & partant ſi l'on ſuppoſe que les petites parties Pp, pq ſoient égales entr'elles; il eſt clair que dx ſera conſtante par rapport à dy & à du, puiſque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn, & Mm qui devient mn, varient. On pourroit ſuppoſer que les petites parties de la courbe Mm, mn ſeroient égales entr'elles, & alors du ſeroit conſtante par rapport à dx & à dy; & enfin ſi l'on ſuppoſoit que Rm & Sn fuſſent égales, dy ſeroit conſtante par rapport à dx & à du, & ſa différence Hn (ddy) ſeroit nulle.

De même pour prendre la différence troiſiéme de PM, ou la différence de la différence ſeconde Hn, il faut imaginer ſur l'axe trois petites parties Pp, pq, qf; ſur la courbe trois autres Mm, mn, no; & ſur les appliquées auſſi trois autres Rm, Sn, To, & alors on aura dx ou du ou dy pour conſtante, ſelon qu'on ſuppoſera que les petites parties Pp, pq, qf, ou Mm, mn, no, ou Rm, Sn, To ſont égales entr'elles. Il en eſt de même des différences quatriémes, cinquiémes, &c.

FIG. 47. Tout ceci ſe doit auſſi entendre des courbes AMD, dont les appliquées BM, Bm, Bn partent toutes d'un point fixe B; car pour avoir, par éxemple, la différence ſeconde de BM, il faut imaginer deux autres appliquées Bm, Bn qui faſſent des angles MBm, mBn infiniment petits, & ayant décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, mS; la différence

des

des petites droites *Rm*, *Sn*, ſera la différence ſeconde de *BM*; & l'on pourra prendre pour conſtants les petits arcs *MR*, *mS*, ou les petites portions de la courbe *Mm*, *mn*, ou enfin les petites droites *Rm*, *Sn*. Il en va de même pour les différences troiſiémes, quatriémes, &c. de l'appliquée *BM*.

REMARQUE.

63. ON doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits: que *Rm*, par éxemple, eſt infiniment petite par rapport à *PM*, & infiniment grande par rapport à *Hn*; de même que l'eſpace *MPpm* eſt infiniment petit par rapport à l'eſpace *APM*, & infiniment grand par rapport au triangle *MRm*. FIG. 46.

2°. Que la différence entiére *Pf* eſt encore infiniment petite par rapport à *AP*; parceque toute quantité qui eſt la ſomme d'un nombre fini de quantités infiniment petites telles que *Pp*, *pq*, *qf* par rapport à une autre *AP*, demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité: & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inferieur qui la compoſe, ſoit infini.

COROLLAIRE II.

64. ON peut marquer en cette ſorte les différences ſecondes dans toutes les ſuppoſitions poſſibles.

1°. Dans les courbes où les appliquées *mR*, *nS* ſont paralleles entr'elles, on prolongera la petite droite *Mm* en *H* où elle rencontre l'appliquée *Sn*; & ayant décrit du centre *m*, de l'intervalle *mn*, l'arc *nk*, on tirera les petites droites *nl*, *li*, *kcg* paralleles à *mS* & à *Sn*. Cela poſé, ſi l'on veut que *dx* ſoit conſtante, c'eſt à dire que *MR* ſoit égale à *mS*; il eſt clair que le triangle *mSH* eſt ſemblable & égal au triangle *MRm*, & qu'ainſi *Hn* eſt *ddy*, c'eſt à dire la différence de *Rm* & *Sn*, & *Hk* = *ddu*. Mais ſi l'on ſuppoſe que *du* ſoit conſtante, c'eſt à dire que *Mm* = *mn* ou à *mk*; il eſt évident alors que le triangle *mgk* eſt ſemblable & égal au triangle *MRm*, & qu'ainſi *kc* = *ddy*, & FIG. 48. 49.

Sg ou $cn = ddx$. Enfin ſi l'on prend dy pour conſtante, c'eſt à dire $mR = nS$, il s'enſuit que le triangle mil eſt égal & ſemblable au triangle MRm, & qu'ainſi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

Fig. 50. 51. 2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn partent d'un même point B, l'on decrira du centre B les arcs MR, mS, que l'on regardera* comme de petites droites perpendiculaires ſur Bm, Bn; & ayant prolongé Mm en E, & décrit du centre m, de l'intervalle mn, le petit arc nkE, on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kg paralleles à mS & à Sn. Cela poſé, à cauſe du triangle BSm réctangle en S, l'angle $BmS + mBn$, ou $+ EmH$ vaut un droit, & partant l'angle BmE vaut un droit $+ SmH$; il vaut auſſi le droit $MRm + RMm$, puiſqu'il eſt externe au triangle RMm. Donc l'angle $SmH = RMm$.

*Art. 3.

Il ſuit de ceci, 1°. Que ſi l'on veut que dx ſoit conſtante, c'eſt à dire que les petits arcs MR, mS ſoient égaux entr'eux, le triangle SmH ſera ſemblable & égal au triangle RMm, & qu'ainſi $Hn = ddy$, & $Hk = ddu$. 2°. Que ſi l'on prend du pour conſtante, le triangle gmk ſera ſemblable & égal au triangle RMm, & qu'ainſi kc exprimera ddy & Sg ou cn, ddx. Enfin, 3°. Que ſi l'on prend dy pour conſtante, les triangles iml, RMm ſeront égaux & ſemblables; & qu'ainſi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

Problême.

65. PRENDRE *la différence d'une quantité compoſée de différences quelconques.*

On prendra pour conſtante la différence que l'on voudra, & traittant les autres comme des quantités variables, on ſe ſervira des regles preſcrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour conſtante, ſera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{2xdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ en prenant dy pour conſtante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour conſtante, ſera $dz\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout diviſé par dx, c'eſt à dire $\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour conſtante, elle ſera $dzdx\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}-zddx\sqrt{dx^2+dy^2}$, le tout diviſé par dx^2, c'eſt à dire $\frac{dzdx^2+dzdxdy^2-zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, en prenant dx pour conſtante, ſera $\overline{dy^2+yddy}\sqrt{dx^2+dy^2}-\frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout diviſé par dx^2+dy^2, c'eſt à dire $\frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour conſtante, elle ſera $\frac{dx^2dy^2+dy^4-ydydxddx}{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour conſtante, ſera $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut obſerver que dans ce dernier cas il n'eſt pas libre de prendre dy pour conſtante, car dans cette ſuppoſition ſa différence ddy ſeroit nulle; & par conſéquent elle ne devroit pas ſe rencontrer dans la quantité propoſée.

DÉFINITION II.

Lorſqu'une ligne courbe AFK eſt en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui ſépare la partie concave de la convexe, & qui par conſéquent eſt la fin de l'une & le commencement de l'autre, eſt appellé point d'*inflexion*, lorſque la courbe étant parvenue en F continue ſon chemin vers le même côté: & point de *rebroussement* lorſqu'elle rebrouſſe chemin du côté de ſon origine. FIG. 52. 53. 54. 55.

PROPOSITION II.

Problême général.

66. LA *nature de la ligne courbe* AFK *étant donnée, déterminer le point d'infléxion ou de rebrouſſement* F.

FIG. 52. 53. Supoſons en premier lieu que la ligne courbe AFK ait pour diametre une ligne droite AB, & que ſes appliquées PM, EF, &c. ſoient toutes paralleles entr'elles. Si l'on mene par le point F, l'appliquée FE avec la tangente FL; & par un point quelconque M de la partie AF, une appliquée MP avec une tangente MT: il eſt clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'infléxion, que la coupée AP croiſſant continuellement, la partie AT du diametre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît auſſi juſqu'à ce que le point P tombe en E, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT étant appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL lorſque le point P tombe ſur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebrouſſement, que la partie AT croiſſant continuellement, la coupée AP croît auſſi juſqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP étant appliquée en T doit devenir un *plus grand* AE lorſque le point T tombe en L.

Or ſi l'on nomme AE, x; EF, y; l'on aura $AL = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence, qui eſt $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$ (en ſupoſant dx conſtante), étant diviſée par dx différence de AE, doit

* *Art.* 47. être* nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{yddy}{dy^2} = o$ ou à l'infini: de ſorte que multipliant par dy^2, & diviſant par $-y$, il vient $ddy = o$ ou à l'infini; ce qui ſervira dans la ſuite de formule générale pour trouver le point d'infléxion ou de rebrouſſement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx; & prenant la différence de cette valeur, en ſuppoſant dx conſtante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira

dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions à trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'infléxion ou de rebrouſſement F.

L'origine A des x peut être tellement ſitué que $AL = x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu de $\frac{ydx}{dy} - x$, & que AL ou AE ſoit *un moindre* au lieu d'être un *plus grand*: mais comme la conſéquence eſt toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il eſt à remarquer que AL ne peut jamais être $= x + \frac{ydx}{dy}$, car lorſque le point T tombe de l'autre côté du point P, par rapport à l'origine A des x, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ ſera négative ſuivant l'article 10, & par conſéquent celle de $-\frac{ydx}{dy}$ ſera poſitive, de ſorte qu'on aura encore en ce cas $AE + EL$. ou $AL = x - \frac{ydx}{dy}$.

La même choſe ſe peut encore trouver de cette autre maniére. Il eſt clair qu'en prenant dx pour conſtante, & ſuppoſant que l'appliquée y augmente, Sn eſt moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de $Hn\,(ddy)$ doit devenir de poſitive négative ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement F; & partant * qu'elle y doit être ou nulle ou infinie. FIG. 48. 49. *Art. 47.

Suppoſons en ſecond lieu que la courbe AFK ait pour appliquées les droites BM, BF, BM, qui partent toutes d'un même point B. Si l'on mene telle appliquée BM qu'on voudra, avec une tangente MT qui rencontre BT perpendiculaire à BM au point T; & qu'ayant pris le point m infiniment près de M, l'on tire l'appliquée Bm, la tangente mt, & la perpendiculaire Bt ſur Bm, qui rencontre MT en O; il eſt viſible (en ſuppoſant que l'appliquée BM, qui devient Bm, augmente) que dans la partie concave, Bt ſurpaſſe BO, & qu'au contraire elle eſt moindre dans la partie convexe; de ſorte que ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement F, la valeur de Ot doit devenir de poſitive négative. FIG. 54. 55. FIG. 56. 57.

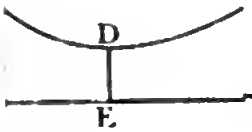
Cela poſé, ſi l'on décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, TH, on formera les triangles ſemblables mRM, MBT, THO, & les petits ſécteurs ſemblables BMR, BTH. Nommant donc BM, y; MR, dx; l'on aura $mR\,(dy) . RM$ FIG. 56.

$(dx) :: BM(y) . BT = \frac{ydx}{dy} :: MR(dx) . TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH (\frac{dx^2}{dy}) . HO = \frac{dx^2}{dy^2}$. Or ſi l'on prend la différence de $BT (\frac{ydx}{dy})$ en ſuppoſant dx conſtante, il vient $Bt - BT$ ou $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^2 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. D'où il ſuit en multipliant par dy^2, & diviſant par dx, que la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ ſera nulle ou infinie ſous le point d'inflexion ou de rebrouſſement F. Or la nature de
FIG. 54. 55. la ligne AFK étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en dx, & de ddy en dx^2, leſquelles étant ſubſtituées dans $dx^2 + dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebrouſſement F. Ce qui étoit propoſé.

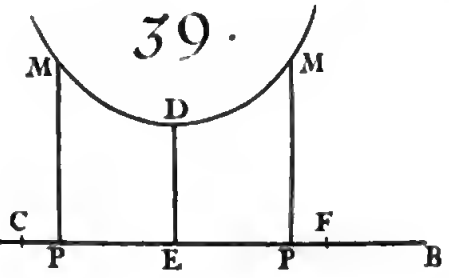
FIG. 50. 51. Pour trouver encore la même choſe d'une autre maniére, il faut conſidérer que dans la partie concave l'angle BmE ſurpaſſe l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il
FIG. 50. eſt moindre; & partant que l'angle $EmE - Bmn$ ou Emn, c'eſt à dire l'arc En qui en eſt la meſure, devient de poſitif négatif ſous le point cherché F. Or prenant dx pour conſtante, les triangles réctangles ſemblables HmS, Hnk, donneront $Hm(du) . mS(dx) :: Hn(-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{du}$. où l'on doit obſerver que la valeur de Hn eſt négative, parceque $Bm(y)$ croiſſant, $Rm(dy)$ diminue. Mais à cauſe des ſécteurs ſemblables BmS, mEk, l'on aura $Bm(y) . mS(dx) :: mE(du) . Ek = \frac{dxdu}{y}$, & partant $Ek + kn$ ou $En =$
FIG. 54. 55. $\frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. D'où il ſuit en multipliant par ydu, & diviſant par dx, que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit devenir de poſitive, négative ſous le point cherché F.

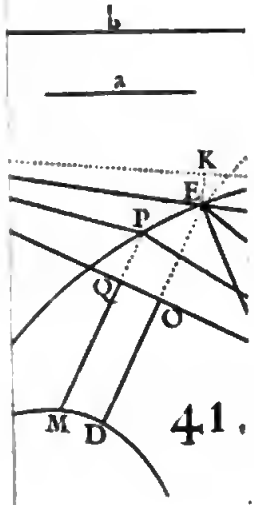
Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie, les termes dx^2 & dy^2 ſeront nuls par rapport au terme $yddy$; & par conſéquent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = o$ ou à l'infini, ſe changera en cette autre $-yddy = o$ ou à l'infini, c'eſt à dire en diviſant par $-y$, $ddy = o$ ou à l'infini, qui eſt la formule du premier cas. Ce qui doit auſſi arriver, puiſque

37.

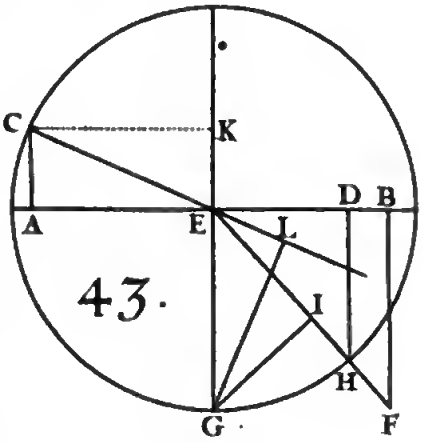


39.

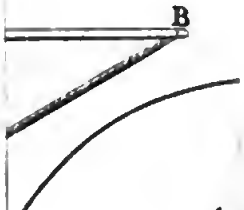




41.

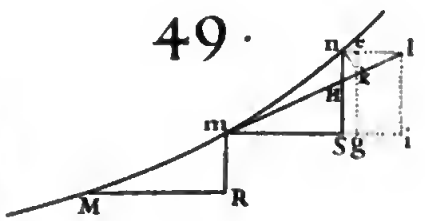


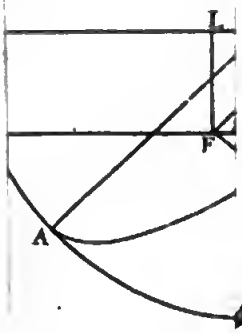
43.

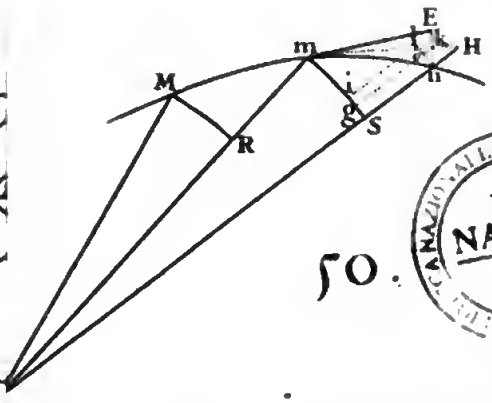


4

49.







50.

NAPOLI

Gravé par Berey

les appliquées BM, BF, BM deviennent alors paralleles.

COROLLAIRE.

67. LORSQUE $ddy = 0$, il eſt clair que la différence de AL doit être nulle par rapport à celle de AE; & partant que les deux tangentes infiniment proches FL, fL doivent tomber l'une ſur l'autre, en ne faiſant qu'une ſeule ligne droite fFL Mais lorſque $ddy =$ à l'infini, la différence de AL doit être infiniment grande par rapport à celle de AE, ou (ce qui eſt la même choſe) la différence de AE eſt infiniment petite par rapport à celle de AL; & par conſéquent l'on peut mener par le même point F deux tangentes FL, Fl qui faſſent entr'elles un angle infiniment petit LFl. FIG. 52. FIG. 53.

De même lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, il eſt viſible que Ot doit devenir nulle par rapport à MR; & qu'ainſi les deux tangentes infiniment proches MT, mt, doivent tomber l'une ſur l'autre, lorſque le point M devient un point d'inflexion ou de rebrouſſement : mais au contraire lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, Ot doit être infinie par rapport à MR, ou (ce qui eſt la même choſe) MR infiniment petite par rapport à Ot; & par conſéquent le point m doit tomber ſur le point M, c'eſt à dire qu'on peut mener par le même point M deux tangentes qui faſſent entr'elles un angle infiniment petit, lorſque ce point devient un point d'inflexion ou de rebrouſſement. FIG. 56. 57.

Il eſt évident que la tangente au point d'inflexion ou de rebrouſſement F, étant prolongée, touche & coupe la courbe AFK dans ce même point.

EXEMPLE I.

68. SOIT une ligne courbe AFK qui ait pour diametre la ligne droite AB; & qui ſoit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), ſoit exprimée par l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'inflexion F. FIG. 58.

L'équation à la courbe eſt $y = \frac{axx}{xx+aa}$; & partant $dy = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$, & prenant la différence de cette quantité en ſuppoſant dx conſtante, & l'égalant enſuite à zero, on trouve $\frac{2a^3dx^2 \times xx+aa - 8a^3xxdx^2 \times \sqrt{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4} = 0$; ce qui multiplié par $\overline{xx+aa}^4$, & diviſé par $2a^3dx^2 \times \sqrt{xx+aa}$, donne $xx + aa - 4xx = 0$, d'où l'on tire $AE\,(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx ſa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$, on trouve $EF\,(y) = \frac{1}{4}a$; de ſorte qu'on peut déterminer le point d'infléxion F ſans ſuppoſer que la courbe AFK ſoit décrite.

Si l'on mene AC parallele aux appliquées EF, & égale à la droite donnée a, & qu'on tire CG parallele à AB, elle ſera aſymptote de la courbe AFK. Car ſi l'on ſuppoſe x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$ ſe changera en celle-ci $y = a$.

EXEMPLE II.

69. SOIT $y - a = \overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Donc $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{x-a^7}}$, en prenant dx pour conſtante. Or ſi l'on ſuppoſe cette fraction égale à zero, on trouve $-6dx^2 = 0$; ce qui ne faiſant rien connoître, il la faut ſuppoſer infiniment grande; & par conſéquent ſon dénominateur $25\sqrt[5]{x-a^7}$ infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue $AE\,(x) = a$.

EXEMPLE III.

FIG. 59. 70. SOIT une demi-roulette allongée AFK dont la baſe BK ſurpaſſe la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer ſur

ſur le diametre AB, le point E, en ſorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'infléxion F.

Ayant nommé les connues ADB, a; BK, b; AB, $2c$; & les inconnues AE, x; ED, z; l'arc AD, u; EF, y; l'on aura par la proprieté de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & partant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la proprieté du cercle l'on aura $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$, & $du\,(\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour conſtante) donne $\frac{bcx - acc - bcc \times dx^2}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$; d'où l'on tire $AE\,(x) = c + \frac{ac}{b}$, & $CE = \frac{ac}{b}$.

Il eſt clair qu'afin qu'il y ait un point d'infléxion F, il faut que b ſurpaſſe a; car s'il étoit moindre, CE ſurpaſſeroit CB.

EXEMPLE IV.

71. ON demande le point d'infléxion F de la Conchoïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour aſymptote la droite BC. Sa proprieté eſt telle, qu'ayant mené du pole P à un de ſes points quelconques F la droite PF, qui rencontre l'aſymptote BC en D; la partie DF eſt toujours égale à une même droite donnée a. FIG. 60.

Ayant mené PA perpendiculaire, & FE parallele à BC, on nommera les connues AB ou FD, a; BP, b; & les inconnues BE, x; EF, y; & tirant DL parallele à BA, les triangles ſemblables DLF, PEF donneront $DL\,(x).\ LF\ (\sqrt{aa - xx}) :: PE\,(b + x).\ EF\,(y) = \frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}$. dont la difference eſt $dy = \frac{x^3 dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égale à zero, on formera l'égalité $\frac{2a^4 b - aax^3 - 3aabxx \times dx^2}{aax^3 - x^5 \times \sqrt{aa - xx}} = 0$,

qui se réduit à $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$, dont l'une des racines fournit pour BE la valeur cherchée.

Si $a = b$, l'équation précedente se changera en cette autre $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$, laquelle étant divisée par $x + a$, donne $xx + 2ax - 2aa = 0$; & partant $BE\,(x) = -a + \sqrt{3aa}$.

Autrement.

En prenant pour appliquées les lignes PF qui partent du pole P, & en se servant de la formule * $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui fasse avec PF l'angle FPf infiniment petit, & décrit du centre P les petits arcs FG, DH, on nommera les connues AB, a; BP, b; & les inconnues PF, y; PD, z; & l'on aura par la proprieté de la conchoïde $y = z + a$, ce qui donne $dy = dz$. Or à cause du triangle rectangle DBP, $DB = \sqrt{zz - bb}$; & à cause des triangles semblables DBP & dHD, PDH & PFG, l'on aura $DB(\sqrt{zz-bb}).\ BP(b) :: dH(dz).\ HD = \frac{bdz}{\sqrt{zz-bb}}$. Et $PD(z).\ PF(z+a) :: HD\left(\frac{bdz}{\sqrt{zz-bb}}\right).\ FG(dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz-bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz-bb}}{bz+ab}$, dont la différence est (en supposant dx constante) $ddy = \frac{bz^3 + 2abzz - ab^2z \times dzdx}{bz+ab^2\sqrt{zz-bb}} = \frac{bz^4 + 2abz^3 - ab^2z \times dx^2}{bz+ab^3}$ en mettant pour dz sa valeur. Donc si l'on substitue dans la formule générale * $ydy = dx^2 + dy^2$ à la place de y sa valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient de trouver en dx & dx^2; on formera cette équation $\frac{z^4 + 2az^3 - abbz \times dx^2}{bz+ab^3} = \frac{z^4 + 2abbz + aabb \times dx^2}{bz+ab^3}$ qui se réduit à $2z^3 - 3bbz - abb = 0$, dont l'une des racines augmentée de a fournit la valeur de l'inconnue PF.

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3a^2z - a^3 = 0$, qui étant divisée par $z + a$, donne $zz - az - \frac{aa}{2} = 0$, dont la résolution fournit $PF\,(z+a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a+a\sqrt{3}}{2}$.

* *Art. 66.*

* *Art. 66.*

EXEMPLE V.

72. SOIT une autre eſpece de Conchoïde AFK, telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'aſymptote BC en D, le rectangle $PD \times DF$ ſoit toujours égal au même rectangle $PB \times BA$. On demande le point d'inflexion F. FIG. 60.

Si l'on nomme les inconnues BE, x; EF, y; & les connues AB, a; BP, b; on aura $PD \times DF = ab$; & les paralleles BD, EF donneront $PD \times DF\,(ab)\,.\,PB \times BE\,(bx) :: \overline{PF}^2\,(bb + 2bx + xx + yy)\,.\,\overline{FE}^2\,(bb + 2bx + xx)$. Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$, & $y = \overline{b + x}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, dont la différence donne $dy = \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$; & prenant encore la différence, on forme l'égalité $\frac{\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2}{4axx - 4x^3 \times \sqrt{ax - x^2}} = o$, qui ſe réduit à $x = \frac{3ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE.

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$ valeur de dy égal à zero, l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = o$, dont les deux racines $\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ & $\frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ fourniſſent, lorſque a ſurpaſſe $8b$, deux valeurs de BH & BL, telles que l'appliquée HM eſt moindre que ſes voiſines, & l'appliquée LN plus grande, c'eſt à dire que les tangentes en M & N ſeront paralleles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L. FIG. 61.

Mais lorſque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL ſeront égales chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'inflexion F ſera parallele à l'axe AB. Et enfin lorſque a eſt moindre que $8b$, les deux racines ſeront imaginaires; & par conſéquent il n'y aura aucune tangente qui puiſſe être parallele à l'axe. FIG. 62.

On pourroit encore réſoudre cette queſtion en prenant
FIG. 60. pour appliquées les lignes PF, Pf, qui partent du pole P, & en ſe ſervant de la formule $ydy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'éxemple précédent.

EXEMPLE VI.

FIG. 63. 73. SOIT un cercle AED qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK telle qu'ayant mené à diſcrétion le rayon BFE, le quarré de FE ſoit égal au réctangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'infléxion F.

Ayant nommé l'arc AE, z; le rayon BA ou BE, a; & l'appliquée BF, y; on aura $bz = aa - 2ay + yy$, & (en prénant les différences) $\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cauſe des ſécteurs ſemblables BEe, BFG, on fera $BE\ (a) . BF\ (y) :: Ee\ \left(\frac{2ydy - 2ady}{b}\right) . FG\ (dx) = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$. dont la différence, en ſuppoſant dx conſtante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$. Si donc on ſubſtitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs
* *Art.* 66. en dy^2 dans la formule générale* $yddy = dx^2 + dy^2$, on formera l'équation $\frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb}$ qui ſe réduit à $4y^4 - 12ay^3 + 12aay^2 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0$, dont la réſolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il eſt évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir un point d'infléxion F. Car la circonférence AED ne différant pas d'abord ſenſiblement de la tangente en A, il ſuit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'enſuite la courbure de la circonférence autour de ſon centre devenant ſenſible, elle doit devenir concave vers ce centre.

EXEMPLE VII.

74. SOIT une ligne courbe AFK qui ait pour axe la droite AB, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B, la partie interceptée AB ſoit toujours à la tangente BF en raiſon donnée de m à n. Il eſt queſtion de déterminer le point de rebrouſſement F. FIG. 64.

Ayant nommé les inconnues & variables AE, x; EF, y; l'on aura $EB = -\frac{ydx}{dy}$ (parceque x croiſſant, y diminue), $FB = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$. Or par la proprieté de la courbe, $AE + EB$ ou $AB\left(\frac{xdy-ydx}{dy}\right).BF\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) :: m.n$. Donc $m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nxdy}{y} - ndx$, & ſa différence donne $\frac{mdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-nydxdy+nxyddy-nxdy^2}{yy}$ en ſuppoſant dx conſtante & négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-nydxdy-nxdy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{myydy-nxy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Maintenant ſi l'on fait cette fraction égale à zero, on trouvera $-ydx-xdy=0$; ce qui ne fait rien connoître. C'eſt pourquoi il faut ſuppoſer cette fraction égale à l'infini, c'eſt à dire ſon dénominateur égal à zero; ce qui donne $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy-nydx}{my}$ à cauſe de l'équation à la courbe, d'où l'on tire $dx = \frac{nnxxdy-mmyydy}{nnxy}$. Or quarrant chaque membre de l'équation $mydy = nx\sqrt{dx^2+dy^2}$, on trouve encore $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy-nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy-mmyydy}{nnxy}$. d'où l'on tire enfin $y\sqrt{mm-nn} = nx$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit décrit du diametre $AD = m$, un demi-cercle AID; & ayant pris la corde $DI = n$, ſoit tirée l'indéfinie AI. Je dis qu'elle rencontrera la courbe AFK au point de rebrouſſement F.

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB, les triangles réctangles ſemblables DIA, IHA, FEA donneront $DI\ (n).\ IA\ (\sqrt{mm-nn})::IH.HA::FE\ (y).\ EA\ (x)$. & partant $y\sqrt{mm-nn}=nx$ qui étoit le lieu à conſtruire.

Il eſt clair que BF eſt parallele à DI, puiſque $AB.\ BF::AD\ (m).\ DI\ (n)$. d'où il ſuit que l'angle AFB eſt droit; & partant que les lignes AB, BF, BE ſont en proportion continue.

On peut trouver cette même proprieté ſans aucun cal-
* *Art 67.* cul, ſi l'on imagine * au même point de rebrouſſement F deux tangentes FB, Fb qui faſſent entr'elles un angle BFb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc BL, on aura $m.n::Ab.bF::AB.BF::Ab-AB$ ou $Bb.bF-BF$ ou $bL::BF.BE$. à cauſe des triangles réctangles ſemblables BbL, FBE. Donc, &c.

Si $m=n$, il eſt évident que la droite AF deviendra perpendiculaire ſur l'axe AB; & qu'ainſi la tangente FB ſera parallele à cet axe; ce que l'on ſçait d'ailleurs devoir arriver, puiſqu'en ce cas la courbe AF doit être un demi-cercle qui ait ſon diametre perpendiculaire ſur l'axe AB. Mais ſi m étoit moindre que n, il eſt évident qu'il n'y auroit aucun point de rebrouſſement, parcequ'alors l'équation $y\sqrt{mm-nn}=nx$ renfermeroit une contradiction.

SECTION V.

Uſage du calcul des differences pour trouver les Dévelopées.

DE'FINITION.

SI l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque *BDF* concave vers le même côté, ſoit envelopee ou entourée d'un fil *ABDF*, dont l'une des extrémités ſoit fixe en *F*, & l'autre ſoit tendue le long de la tangente *BA*, & que l'on faſſe mouvoir l'extrémité *A* en la tenant toujours tendue & en dévelopant continuellement la courbe *BDF*; il eſt clair que l'extrémité *A* de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe *AHK*. FIG. 65.

Cela poſé, la courbe *BDF* ſera nommée la *Dévelopée* de la courbe *AHK*.

Les parties droites *AB*, *HD*, *KF* du fil *ABDF* ſeront nommées les *rayons de la dévelopée*.

COROLLAIRE I.

75. DE ce que la longueur du fil *ABDF* demeure toujours la même, il ſuit que la portion de courbe *BD* eſt égale à la différence des rayons *DH*, *BA* qui partent de ſes extrémités; de même la portion *DF* ſera egale à la différence des rayons *FK*, *DH*; & la courbe entiére *BDF* à la différence des rayons *FK*, *BA*. D'où l'on voit que ſi le rayon *BA* de la courbe étoit nul, c'eſt à dire que ſi l'extrémité *A* du fil tomboit ſur l'origine *B* de la courbe *BDF*, alors les rayons de la dévelopée *DH*, *FK* ſeroient égaux aux portions *BD*, *BDF* de la courbe *BDF*.

COROLLAIRE II.

76. SI l'on conſidére la courbe *BDF* comme un poligone *BCDEF* d'une infinité de côtés; il eſt clair que l'extrémité *A* du fil *ABCDEF* décrit le petit arc *AG* qui a pour FIG. 66.

centre le point *C*, juſqu'à ce que le rayon *CG* ne faſſe plus qu'une ligne droite avec le petit côté *CD* voiſin de *CB*; & de même qu'elle décrit le petit arc *GH* qui a pour centre le point *D*, juſqu'à ce que le rayon *DH* ne faſſe plus qu'une droite avec le petit côté *DE*; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que la courbe *BCDEF* ſoit entiérement dévelopée. La courbe *AHK* peut être donc conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs de cercle *AG*, *GH*, *HI*, *IK*, &c. qui ont pour centre les points *C*, *D*, *E*, *F*, &c. D'où il ſuit,

1°. Que les rayons de la dévelopée la touchent continuellement comme *DH* en *D*, *KF* en *F*, &c. Et qu'ils ſont tous perpendiculaires à la courbe *AHK* qu'ils décrivent, comme *DH* en *H*, *FK* en *K*, &c. Car *DH*, par éxemple, eſt perpendiculaire ſur le petit arc *GH* & ſur le petit arc *HI*, puiſqu'elle paſſe par leurs centres *D*, *E*. D'où
FIG. 65. l'on voit, 1°. que la developée *BDF* termine l'eſpace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe *AHK*.
2°. Que ſi l'on prolonge un rayon quelconque *HD* qui coupe le rayon *AB* en *R*, juſqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque *KF* en *S*, l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie *RS* deux perpendiculaires ſur la courbe *AHK*, excepté du point touchant *D* duquel on n'en peut mener qu'une ſeule, ſçavoir *DH*. Car il eſt clair que l'interſection *R* des rayons *AB*, *DH* parcourt tous les points de la partie *RS*, pendant que le rayon *AB* décrit par ſon extrémité *A* la ligne *AHK* ſur laquelle il eſt continuellement perpendiculaire : & que les rayons *AB*, *HD* ne ſe confondent que lorſque l'interſection *R* tombe ſur le point touchant D.

FIG. 66. 2°. Que ſi l'on prolonge les petits arcs *HG* en *l*, *IH* en *m*, *KI* en *n*, &c. vers l'origine *A* du dévelopement, chaque petit arc comme *IH* touchera en dehors ſon voiſin *HG*, parceque les rayons *CA*, *DG*, *EH*, *FI* vont toujours en augmentant, à meſure que les petits arcs qui compoſent la courbe *AHK*, s'éloignent du point *A*. Par la même raiſon ſi l'on prolonge les petits arcs *AG* en *o*, *GH* en *p*,

HI

HI en *q*, vers le côté oppoſé au point *A*; chaque petit arc comme *HI* touchera en deſſous ſon voiſin *IK*. Or puiſque les points *H* & *I*, *D* & *E* peuvent être conſidérés comme tombant l'un ſur l'autre à cauſe de l'infinie petiteſſe tant de l'arc *HI*, que du côté *DE*; il s'enſuit que ſi l'on décrit d'un point quelconque moyen *D* de la dévelopée *BDF* comme centre, & de ſon rayon *DH* un cercle *mHp*, il touchera en dehors la partie *HA* qui tombera toute entiere au dedans de ce cercle, & en dedans de l'autre partie *HK* qui tombera toute entiére au dehors de ce même cercle : c'eſt à dire qu'il touchera & coupera la courbe *AHK* au même point *H*, de même que la tangente au point d'infléxion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon *HD* du petit arc *HG*, ne différant des rayons *CG*, *EH* des arcs voiſins *GA*, *HI*, que d'une quantité infiniment petite *CD* ou *DE*; il s'enſuit que pour peu qu'on diminue le rayon *DH*, il ſera moindre que *CG*, & qu'ainſi ſon cercle touchera en deſſous la partie *HA*; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il ſurpaſſera *HE*, & qu'ainſi ſon cercle touchera en dehors la partie *HK* : de ſorte que le cercle *mHp* eſt le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie *HA*, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie *HK* : c'eſt à dire qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire paſſer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'enſuit que la courbure du petit arc *HI* ſera à la courbure du petit arc *AG* réciproquement comme le rayon *BA* ou *CA* de ce dernier eſt à ſon rayon *DH* ou *EH* : c'eſt à dire que la courbure en *H* de la courbe *AHK* ſera à ſa courbure en *A* comme le rayon *BA* au rayon *DH*; & de même que la courbure en *K* eſt à la courbure en *H* comme le rayon *DH* eſt au rayon *FK*. D'où l'on voit que la courbure de la ligne *AHK* diminue continuellement à meſure que la ligne *BDF* ſe dévelope; de ſorte qu'au point *A*, où commence le dévelopement, elle eſt la plus grande qu'il eſt poſſible;

& au point K, où je ſuppoſe qu'il ceſſe, la plus petite.

5°. Que les points de la dévelopée ne ſont autre choſe que le concours des perpendiculaires menées par les extrémités des petits arcs qui compoſent la courbe AHK. Par éxemple, le point D ou E eſt le concours des perpendiculaires HD, IE du petit arc HI; de ſorte que ſi la courbe AHK eſt donnée avec la poſition d'une de ſes perpendiculaires HD, pour trouver le point D ou E, où elle touche la dévelopée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches HD, IE: c'eſt ce qu'on va enſeigner dans le Problême qui ſuit.

PROPOSITION I.

Problême général.

FIG. 67. 77. *LA nature de la ligne courbe* AMD *étant donnée avec une de ſes perpendiculaires quelconque* MC; *déterminer la longueur du rayon* MC *de ſa dévelopée: c'eſt à dire le concours des perpendiculaires infiniment proches* MC, mC.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AMD ait pour axe la ligne droite AB ſur laquelle les appliquées PM ſoient perpendiculaires. On imaginera une autre appliquée mp, qui ſera infiniment proche de MP; puiſque le point m eſt ſuppoſé infiniment près de M. On menera par le point de concours C une parallele CE à l'axe AB, laquelle rencontre les appliquees MP, mp aux points E, e. Enfin menant MR parallele à AB, on formera les triangles réctangles ſemblables MRm, MEC; car les angles EMR, CMm étant droits, & l'angle CMR leur étant commun, l'angle EMC ſera égal à l'angle RMm.

Si donc l'on nomme les données AP, x; PM, y; l'inconnue ME, z; l'on aura Ee ou Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy = dz$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & $MR\,(dx).\,Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2})$ $::$ $ME\,(z).\,MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point C étant le centre du petit arc Mm, ſon rayon CM qui devient Cm lorſ-

que EM augmente de ſa différence Rm, demeure le même. Sa différence ſera donc nulle : ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}=0$; d'où lon tire $ME(z)=\frac{dzdx^2+dzdy^2}{-dyddy}=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ en mettant pour dz ſa valeur dy.

Suppoſons en ſecond lieu que les appliquées BM, Bm parrent toutes d'un même point B. Ayant mené du point cherché C ſur les appliquées, que je ſuppoſe infiniment proches, les perpendiculaires CE, Ce, & décrit du centre B le petit arc MR ; on formera les triangles réctangles ſemblables RMm & EMC, BMR, BEG & CeG. C'eſt pourquoi nommant BM, y ; ME, z ; MR, dx ; on aura $Rm=dy$, $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$, CE ou $Ce=\frac{zdy}{dx}$, & $MC=\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$. On trouvera enſuite, comme dans le premier cas, $z=\frac{dzdx^2+dzdy^2}{-dyddy}$. Or $BM(y).Ce\left(\frac{zdy}{dx}\right)::MR(dx).Ge=\frac{zdy}{y}$ & $me-ME$ ou $Rm-Ge=dz=\frac{ydy-zdy}{y}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz, l'on aura $ME(z)=\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2+dy^2-yddy}$.

Si l'on ſuppoſe que y ſoit infinie, les termes dx^2 & dy^2 ſeront nuls par rapport à $yddy$; & par conſéquent cette derniere formule ſe changera en celle du cas précédent. Ce qui doit auſſi arriver ; puiſque les appliquées deviennent alors paralleles entr'elles, & que l'arc MR devient une droite perpendiculaire ſur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe AMD étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, ou de dx^2 & ddy en dy^2, leſquelles étant ſubſtituées dans les formules précédentes, donneront pour ME une valeur délivrée des différences, & entierement connue. Et menant EC perpendiculaire ſur ME, elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit propoſé.

FIG. 68.

COROLLAIRE I.

FIG. 67. 68. 78. A cauſe des triangles réctangles ſemblables MRm & MEC, l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$, & dans le ſecond cas $MC = \frac{y\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3+dxdy^2-yddxdy}$.

REMARQUE.

79. IL y a encore pluſieurs autres maniéres de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne poſſedent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées ſont perpendiculaires à l'axe.

FIG. 67. Premiere maniére. Soit prolongée MR en G où elle rencontre la perpendiculaire mC. Les angles droits MRm, MmG donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conſéquent $MG = \frac{dx^2+dy^2}{dx}$. Or à cauſe des triangles ſemblables MRm, $MP\mathcal{Q}$ (les points $\mathcal{Q}$, q marquent les interſections des perpendiculaires infiniment proches MC, mC avec l'axe AB) il vient $M\mathcal{Q} = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, $P\mathcal{Q} = \frac{ydy}{dx}$; & partant $A\mathcal{Q} = x + \frac{ydy}{dx}$, dont la différence donne (en prenant dx pour conſtante) $\mathcal{Q}q = dx + \frac{dy^2+yddy}{dx}$, & à cauſe des triangles ſemblables CMG, $C\mathcal{Q}q$, l'on aura $MG - \mathcal{Q}q\left(\frac{-yddy}{dx}\right).MG\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx}\right) :: M\mathcal{Q}\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right).MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Seconde maniére. Ayant décrit du centre C le petit arc $\mathcal{Q}O$, les petits triangles réctangles $\mathcal{Q}Oq$, MRm ſeront ſemblables, puiſque Mm, $\mathcal{Q}O$ & MR, $\mathcal{Q}q$ ſont paralleles; & partant $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}).MR\,(dx) :: \mathcal{Q}q\left(\frac{dx^2+dy^2+yddy}{dx}\right).\mathcal{Q}O = \frac{dx^2+dy^2+yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſecteurs ſemblables CMm,

CQO donnent $Mm — QO\left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)$. $Mm\ (\sqrt{dx^2+dy^2})$. $::MQ\ \left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right)$. $MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Troiſiéme maniere. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt, on aura $PT — AP$ ou $AT = \frac{ydx}{dy} — x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TH, on formera le triangle réctangle HTt ſemblable à RmM, car les angles HtT, RMm ou PTM ſont égaux, ne differant entr'eux que de l'angle Tmt qui eſt infiniment petit; ce qui donne $Mm\ (\sqrt{dx^2+dy^2})$. $mR\ (dy) :: Tt\ (-\frac{ydxddy}{dy^2})$. $TH = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſéctеurs TmH, MCm ſont ſemblables, car l'angle $Tmt + MmC$ vaut un droit, & l'angle $MmC + MCm$ vaut auſſi un droit à cauſe du triangle CMm conſideré comme réctangle en M. Donc $TH\ (-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}})$. $Mm\ (\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Tm$ ou $TM\ (\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy})$. $MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Quatriéme maniére. On marquera * les différences ſe- * *Art.* 64.
condes en prenant dx pour conſtante; & les triangles ré- FIG. 69.
ctangles ſemblables HmS, Hnk donneront Hm ou Mm $(\sqrt{dx^2+dy^2})$. mS ou $MR\ (dx) :: Hn\ (-ddy)$. $nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or l'angle kmn eſt égal à celui que font entr'elles les tangentes aux points M, m; & partant comme l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm; d'où il ſuit que les ſéctеurs nmk, MCm ſont ſemblables, & qu'ainſi nk $\left(-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)$. mk ou * $Mm\ (\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Mm$ * *Art.* 2. $(\sqrt{dx^2+dy^2})$. $MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH ou Mm pour mk, parcequ'elles ne différent entr'elles que de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles; de même que Hn eſt infiniment moindre que Rm ou Sn.

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

FIG. 68. Premiére maniére. Ayant mené du point fixe B les perpendiculaires BF, Bf ſur les rayons infiniment proches CM, Cm; les triangles réctangles mMR, BMF, qui ſont ſemblables (puiſqu'ajoûtant aux angles mMR, BMF le même angle FMR, ils compoſent chacun un angle droit), donneront MF ou $MH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, & $BF = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ dont la différence (en prenant dx pour conſtante) eſt $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{dx^2+dy^2 \times \sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or à cauſe des ſécteurs ſemblables CMm, CHf, on forme cette proportion $Mm - Hf . Mm :: MH . MC$, & partant $MC = \frac{ydx^2+ydy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^2+dxdy^2-ydxddy}$.

* *Art.* 64. FIG. 70. Seconde maniére. On marquera * les différences ſecondes en ſuppoſant dx conſtante; & les ſécteurs ſemblables BmS, mEk donneront $Bm(y) . mS(dx) :: mE(\sqrt{dx^2+dy^2}) . Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$. Or à cauſe des triangles réctangles ſemblables HmS, Hnk, l'on aura Hm ou $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}) . mS$ ou $MR(dx) :: Hn(-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Et partant $En = \frac{dx^2+dxdy^2-ydxddy}{y\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & prenant une troiſiéme proportionnelle à En, Em ou Mm, les ſécteurs ſemblables Emn, MCm donneront pour MC la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})$, du; & qu'on prenne dy pour conſtante au lieu de dx, on trouvera dans le premier cas $MC = \frac{du^3}{dyddx}$, & dans le ſecond $MC = \frac{ydu^3}{dxdu^2+ydyddx}$. Et enfin ſi l'on prend du pour conſtante, il vient dans le premier cas $MC = \frac{dxdu}{-ddy}$ ou $\frac{dydu}{ddx}$ (parceque la différence de $dx^2+dy^2 = du^2$ eſt $dxddx$

$+dyddy = o$, & qu'ainſi $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$); & dans le ſecond, $MC = \frac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$ ou $\frac{ydydu}{dxdy + yddx}$.

COROLLAIRE II.

80. COMME l'on ne trouve pour ME ou MC qu'une ſeule valeur, il s'enſuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une ſeule dévelopée BCG. FIG. 72.

COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de ME $\left(\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}\right)$ ou $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right)$ eſt poſitive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul; d'où l'on voit que la courbe ſera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais ſi la valeur de ME eſt négative, il faudra prendre le point E du côté oppoſé; d'où l'on voit que la courbe ſera alors convexe. De ſorte qu'au point d'infléxion ou de rebrouſſement qui ſepare la partie concave de la convexe, la valeur de ME doit devenir de poſitive négative; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne ſe peut faire qu'en deux maniéres. Car ou elles vont en croiſſant à meſure qu'elles approchent du point d'infléxion ou de rebrouſſement; & il faudra pour lors qu'elles deviennent paralleles, c'eſt à dire que le rayon de la dévelopée ſoit infini: ou elles vont en diminuant; & il faudra néceſſairement alors qu'elles tombent l'une ſur l'autre, c'eſt à dire que le rayon de la dévelopée ſoit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la ſéction précédente. FIG. 67. 68.

REMARQUE.

82. COMME l'on a cru juſqu'ici que le rayon de la dévelopée étoit toujours infiniment grand au point d'in-

fléxion, il eſt à propos de faire voir qu'il y a, pour ainſi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'inflexion le rayon de la développée égal à zero ; au lieu qu'il n'y en a qu'un ſeul genre dans lequel ce rayon ſoit infini.

FIG. 71. Soit *BAC* une des courbes qui ont dans leur point d'inflexion *A* le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties *BA*, *AC*, en commençant au point *A*; il eſt clair qu'on formera une ligne courbe *DAE* qui aura auſſi un point d'inflexion dans le même point *A*, mais dont le rayon de la développée en ce point ſera égal à zero. Et ſi l'on formoit de la même ſorte une troiſiéme courbe par le développement de la ſeconde *DAE*, & une quatriéme par le développement de la troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini ; il eſt clair que le rayon de la développée dans le point d'inflexion *A* de toutes ces courbes, ſeroit toujours égal à zero. Donc, &c.

PROPOSITION II.

Problême.

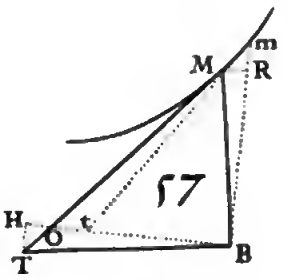
FIG. 72. 83. TROUVER *dans les courbes* AMD, *où l'axe* AB *fait avec la tangente en* A *un angle droit*, *le point* B *où cet axe touche la développée* BCG.

Si l'on ſuppoſe que le point *M* devienne infiniment près du ſommet *A*, il eſt clair que la perpendiculaire *MQ* rencontrera l'axe au point cherché *B* ; d'où il ſuit que ſi l'on cherche en général la valeur de *PQ* ($\frac{ydy}{dx}$) en *x* ou en *y*, & qu'on faſſe enſuite *x* ou $y = o$, on déterminera le point *P* à tomber ſur le point *A*, & le point *Q* ſur le point cherché *B* ; c'eſt à dire que *PQ* deviendra alors égale à la cherchée *AB*. Ceci s'éclaircira par les éxemples qui ſuivent.

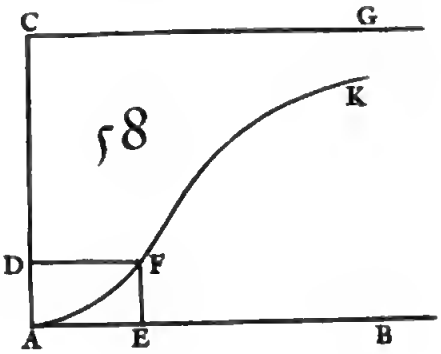
EXEMPLE I.

FIG. 72. 84. SOIT la courbe *AMD* une Parabole qui ait pour para-

55

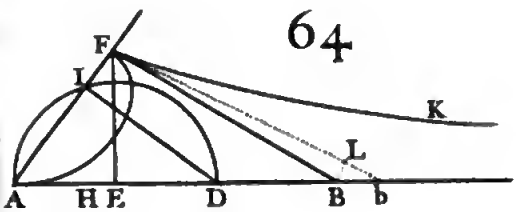


57

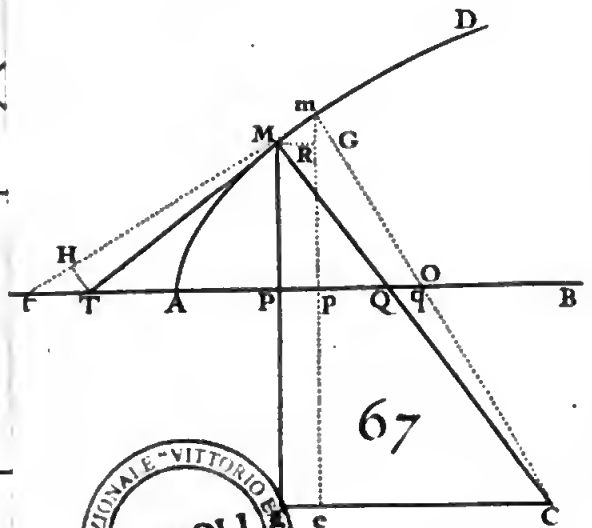


58

60



64



67

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Gravé par Berey

parametre la droite donnée a. L'équation à la parabole eſt $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette derniere équation, en ſuppoſant dx conſtante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Subſtituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on aura * $ME = \frac{a + 4x\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. * Art. 77. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallele à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent $MP(\sqrt{ax}).PT(2x) :: PT(2x).PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; & par conſéquent $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cauſe des triangles réctangles MPQ, MEC, l'on aura $PM(\sqrt{ax}).PQ(\frac{1}{2}a) :: ME(\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}).EC$ ou $PK = \frac{1}{2}a + 2x$. & partant $QK = 2x$. Ce qui donne cette nouvelle conſtruction.

Soit priſe QK double de AP, ou (ce qui revient au même) ſoit priſe PK égale à TQ, & ſoit menée KC parallele à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui ſera à la dévelopée BCG.

Autre maniére. $yy = ax$, & $2ydy = adx$ dont la différence (en ſuppoſant dx conſtante) donne $2dy^2 + 2yddy = 0$; d'où l'on tire $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2}$; & partant * Art. 77. EC ou $PK = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dydx} = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$ ou TQ. Ce qui donne les mêmes conſtructions qu'auparavant. Car $MP.PT :: dy.dx :: PT(\frac{ydx}{dy}).PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

Pour trouver à préſent le point B où l'axe AB touche la développée BCG. On a $PQ\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité eſt conſtante, elle demeurera toûjours la même en quelque endroit que ſe trouve le point M. Et ainſi, lorſqu'il tombe ſur le ſommet A, l'on aura encore PQ qui devient en ce cas $AB = \frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la développée BCG à la maniére de *Deſcartes*. On nommera la coupée BK, u; l'appliquée KC ou PE, t; d'où l'on aura $CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ & $AP + PK - AB(u) = 3x$; mettant donc pour x ſa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, l'on en formera une nouvelle $27att = 16u^3$ qui exprimera la relation de BK à KC. D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire eſt une ſeconde parabole cubique dont le parametre eſt égal à $\frac{27}{16}$ du parametre de la parabole donnée.

FIG. 73. Il eſt viſible que la développée CBC de la parabole commune entiere MAM a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités oppoſées l'une à l'autre, de ſorte qu'elles forment en B un point de rebrouſſement.

AVERTISSEMENT.

FIG. 72. *On entend par* courbes geométriques AMD, BCG *celles dont la relation des coupées* AP, BK *aux appliquées* PM, KC, *ſe peut exprimer par une équation où il ne ſe rencontre point de différences ; & on prend pour* geométrique *tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on ſuppoſe ici que les coupées & les appliquées ſoient des lignes droites.*

COROLLAIRE.

85. LORSQUE la courbe donnée AMD eſt geométrique, il eſt clair que l'on pourra toûjours trouver (comme dans cet éxemple) une équation qui exprime la nature de

ſa développée BCG ; & qu'ainſi cette développée ſera auſſi géométrique. Mais je dis de plus qu'elle ſera réctifiable, c'eſt-à-dire qu'on pourra trouver géométriquement des lignes droites égales à une de ſes portions quelconque BC; car il eſt évident * que l'on déterminera avec le ſecours de la ligne AMD, qui eſt géométrique, ſur la tangente CM de la portion BC, un point M tel que la droite CM ne différera de la portion BC que d'une droite donnée AB. * *Art.* 75.

EXEMPLE II.

86. SOIT la courbe donnée MDM une hyperbole entre ſes aſymptotes, qui ait pour équation $aa = xy$. FIG. 74.

On aura $\frac{aa}{y} = x$, $\frac{-aady}{yy} = dx$, & ſuppoſant dx conſtante, * $\frac{-aayyddy + 2aaydy^2}{y^4} = 0$; d'où l'on tire $ddy = \frac{2dy^2}{y}$; & * *Art.* 1. mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, il vient * $ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$: * *Art.* 77. de ſorte que EC ou $PK = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces conſtructions.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'aſymptote AB, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée en S ; ſoit priſe ME égale à la moitié de MS de l'autre côté de l'aſymptote (que l'on regarde ici comme l'axe) parceque ſa valeur eſt négative ; ou bien ſoit priſe PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T : je dis que ſi l'on mene EC parallele ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C. Car il eſt clair que $MS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, & que $TQ = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention ſur la figure de l'hyperbole MDM, on verra que ſa développée CLC doit avoir un point de rebrouſſement L, de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée eſt plus petit que tout autre rayon

Art. 78. MC ; d'où il ſuit que la différence de ſon expreſſion

Sect. 3. $\frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ ſera nulle ou infinie. Ce qui donne, en prenant toûjours dx pour conſtante, $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}}{dx^2ddy^2}=0$ ou ∞ ; d'où en diviſant par $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$, & multipliant enſuite par $dxddy^2$, on tire cette équation $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=0$ ou ∞, qui ſervira à trouver pour x une valeur AH telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée, le point L ſera le point de rebrouſſement cherché.

On a dans cet éxemple $y=\frac{aa}{x}$, $dy=\frac{-aadx}{xx}$, $ddy=\frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy=\frac{-6aadx^3}{x^4}$. C'eſt pourquoi mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $AH(x)=a$. D'où il ſuit que le point D eſt le ſommet de l'hyperbole, & que les lignes AD, DL ne font qu'une même droite AL qui en eſt l'axe.

EXEMPLE III.

Fig. 72. 74. 87. SOIT l'équation générale $y^m=x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1}dy=dx$ dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $\overline{mm-my^{m-2}dy^2}+my^{m-1}ddy=0$; & en diviſant par my^{m-1}, il vient $-ddy=\frac{\overline{m-1}dy^2}{y}$;

Art. 77. d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on tirera $ME=\frac{ydx^2+ydy^2}{\overline{m-1}dy^2}$; & partant EC ou $PK=\frac{ydy}{\overline{m-1}dx}+\frac{ydx}{\overline{m-1}dy}$. Ce qui donne ces conſtructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe AP, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre

MP prolongée au point S; ſoit priſe $ME = \frac{1}{m-1} MS$, ou bien ſoit priſe $PK = \frac{1}{m-1} TQ$: il eſt clair que ſi l'on mene par le point E une parallele, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront MC au point cherché C.

Si m eſt négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME ſera négative; & par conſequent elles ſeront convexes vers leur axe qui ſera alors une aſymptote. Mais dans les paraboles où m eſt poſitif, il peut arriver deux cas. Car ou m ſera moindre que 1, & alors elles ſeront convexes du côté de leur axe, qui ſera une tangente au ſommet: ou m ſurpaſſe 1, & alors elles ſeront concaves vers leur axe qui ſera perpendiculaire au ſommet. FIG. 74. FIG. 75. FIG. 72.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a $PQ\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{2-m}{m}$; ce qui donne trois différens cas. Car ou $m = 2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'expoſant de y étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conſequent $AB = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du parametre. Ou m eſt moindre que 2, & alors l'expoſant de y étant poſitif, elle ſe trouvera dans le numerateur, ce qui rend (en l'égalant * à zero) la fraction nulle: c'eſt-à-dire que le point B tombe en ce cas ſur le point A comme dans la ſeconde parabole cubique $axx = y^3$. Ou enfin m ſurpaſſe 2, & alors l'expoſant de y étant négatif, elle ſera dans le dénominateur, ce qui rend (lorſqu'elle devient zero) la fraction infinie: c'eſt-à-dire que le point B eſt infiniment éloigné du point A, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe AB eſt aſymptote de la développée comme dans la premiere parabole cubique $aax = y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO de la demi-parabole ADM a un point de rebrouſſement L; de ſorte que par le développement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée DA; * *Art.* 83. FIG. 76. FIG. 77.

au lieu que par le dévelopement de l'autre partie LC continuée auſſi à l'infini, il décrit la portion infinie DM.

On déterminera le point L de même que dans l'hyperbole. Soit par éxemple $aax = y^3$ ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $dddy = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$; & ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, on trouvera* $AH(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$. Il en eſt ainſi des autres.

* *Art.* 86.

REMARQUE.

88. EN ſuppoſant que m ſurpaſſe 1, afin que les paraboles ſoient toûjours concaves du côté de leur axe, il peut arriver différens cas. Car ſi le numerateur de la fraction marquée par m eſt pair, & le dénominateur impair; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire. Mais ſi le numerateur & dénominateur ſont chacun impair; elles ont une poſition renverſée de part & d'autre de leur axe, en ſorte que leur ſommet A eſt un point d'inflexion, comme la premiere parabole cubique $x = y^{\frac{3}{1}}$ ou $aax = y^3$. Enfin ſi le numerateur étant impair, le dénominateur eſt pair; elles ont une poſition renverſée du même côté de leur axe, en ſorte que leur ſommet A eſt un point de rebrouſſement, comme la ſeconde parabole cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela ſuit de ce qu'une puiſſance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela poſé, il eſt évident,

FIG. 73.

FIG. 77.

FIG. 76.

FIG. 77. 1°. Que dans le point d'inflexion A, le rayon de la développée peut être infiniment grand comme dans $aax = y^3$, ou infiniment petit comme dans $aax^3 = y^5$.

FIG. 76. 2°. Que dans le point de rebrouſſement A, le rayon de la développée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^5$, ou zero comme dans $axx = y^3$.

Digitized by Google

3°. Qu'il ne s'enſuit pas de ce que le rayon de la deve- FIG. 73.
lopée eſt infini ou zero, que les courbes ayent alors un point d'infléxion ou de rebrouſſement. Car dans $a^3x = y^4$ il eſt infini, dans $ax^3 = y^4$ il eſt nul; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

89. SOIT la courbe *AMD* une hyperbole ou une ellipſe FIG. 78. 79.
qui ait pour axe *AH(a)*, & pour parametre *AF(b)*.

On aura par la proprieté de ces lignes $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}$,

$dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, & $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{4aabx \mp 4abxx\sqrt{aabx \mp abxx}}$. Si donc l'on met ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ expreſſion générale de* *MC*, on trouvera dans ces deux courbes *MC* *Art. 78.

$= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb}$

$= \frac{4MQ^2}{bb}$, puiſque de part & d'autre $MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right)$

$= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}$. Ce qui donne cette conſtruction qui ſert auſſi pour la parabole.

Soit priſe *MC* quadruple de la quatriéme continuellement proportionnelle au parametre *AF* & à la perpendiculaire *MQ* terminée par l'axe; le point *C* ſera à la dévelopée.

Si l'on fait $x = o$, on aura* $AB = \frac{1}{2}b$. Et ſi l'on fait dans *Art. 83.
l'ellipſe $x = \frac{1}{2}a$, on trouvera $DG = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'eſt-à-dire FIG. 79.
égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipſe la dévelopée *BCG* ſe termine en un point *G* du petit axe *DO* où elle forme un point de rebrouſſement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si $a = b$ dans l'ellipſe, il vient $MC = \frac{1}{2}a$; d'où il ſuit que tous les rayons de la développée ſont égaux entr'eux, & qu'elle ne ſera par conſequent qu'un point: c'eſt-à-dire que l'ellipſe devient en ce cas un cercle qui a pour développée ſon centre. Ce que l'on ſçait d'ailleurs être veritable.

EXEMPLE V.

FIG. 80. 90. SOIT la courbe AMD une logarithmique ordinaire, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M la perpendiculaire MP ſur l'aſymptote KP, & la tangente MT; la ſoutangente PT ſoit toujours égale à la même droite donnée a.

On a donc $PT(\frac{ydx}{dy}) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $ddy = \frac{dydx}{a}$ *Art. 77. $= \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME = \frac{-aa-yy}{y}$; & partant EC ou $PK = \frac{-aa-yy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit priſe PK égale à TQ du même côté de T, parceque ſa valeur eſt négative; & ſoit menée KC parallele à PM: je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire MC au point cherché C. Car $TQ = \frac{aa+yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M ſoit celui de la plus grande courbure, on ſe ſervira de la formule $dx^2dddy + dy^2dddy$ *Art. 86. $- 3dyddy^2 = 0$, que l'on a trouvée * dans l'exemple ſecond; & mettant pour dy, ddy, $dddy$, leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera $PM(y) = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Il eſt clair, en prenant dx pour conſtante, que les appliquées y ſont entr'elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il ſuit qu'elles ſont auſſi une progreſſion geométrique. Car ſi l'on conçoit que l'aſymptote ou l'axe PK ſoit diviſé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou MR, pf ou mS, fg ou nH, &c. compriſes entre les appli-

appliquées PM, pm, fn, go, &c. l'on aura $PM . pm :: Rm . Sn :: PM + Rm$ ou $pm . pm + Sn$ ou Fn. On prouve de même que $pm . fn :: fn . go$, & ainſi de ſuite. Les appliquées PM, pm, fn, go, &c. feront donc entr'elles une progreſſion geométrique.

EXEMPLE VI.

91. SOIT la courbe AMD une logarithmique ſpirale, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M au point fixe A, qui en eſt le centre, la droite MA & la tangente MT, l'angle AMT ſoit par tout le même. FIG. 81.

L'angle AMT ou AmM étant conſtant, la raiſon de $mR\ (dy)$ à $RM\ (dx)$ ſera auſſi conſtante. Il faut donc que la différence de $\frac{dy}{dx}$ ſoit nulle ; ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = o$. C'eſt pourquoi effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ expreſſion * générale de ME lorſque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve $ME = y$, c'eſt-à-dire $ME = AM$. Ce qui donne cette conſtruction. * *Art.* 77.

Soit menée AC perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe ; le point C ſera à la dévelopée ACB.

Les angles AMT, ACM ſont égaux, puiſqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La dévelopée ACG ſera donc la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & elle n'en differera que par ſa poſition.

Si l'on ſuppoſe que le point C de la dévelopée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de ſon rayon en ce point, qui * eſt egal à la portion AC qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en A ; il eſt clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire ſur AC. De ſorte que ſi l'on mene AT perpendiculaire ſur * *Art.* 75.

AM, la tangente MT ſera auſſi égale à la portion AM de la logarithmique ſpirale donnée AMD.

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées AM, Am, An, Ao, &c. qui faſſent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il eſt clair que les triangles MAm, mAn, nAo, &c. ſeront ſemblables, puiſque les angles en A ſont égaux, & que par la proprieté de la logarithmique, les angles en m, n, o, &c. le ſont auſſi. Et partant $AM . Am :: Am . An$. Et $Am . An :: An . Ao$. & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que les appliquées AM, Am, An, Ao, &c. ſont une progreſſion geométrique lorſqu'elles ſont entr'elles des angles égaux.

EXEMPLE VII.

FIG. 82. **92.** SOIT la courbe AMD une des ſpirales à l'infini, formée dans le ſecteur BAD avec une proprieté telle qu'ayant mené un rayon quelconque AMP, & ayant nommé l'arc entier BPD, b ; ſa partie BP, z ; le rayon AB ou AP, a ; & ſa partie AM, y ; on ait cette proportion $b . z :: a^m . y^m$.

L'équation à la ſpirale AMD eſt $y^m = \frac{a^m z}{b}$, dont la différence donne $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à cauſe des ſecteurs ſemblables AMR, APp, l'on aura $AM(y) . AP(a) :: MR(dx) . Pp(dz) = \frac{a dx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour conſtante) eſt $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = o$; d'où en diviſant par my^{m-1}, l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant ME * $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + m + 1 dy^2}$; ce qui donne cette conſtruction.

* *Art.* 77.

Soit menée par le centre A la droite TAQ perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en T la tangente MT, & en Q la perpendiculaire MQ ; ſoit fait $TA + \overline{m+1} AQ$.

$TQ :: MA . ME$. Je dis que menant EC parallele à TQ, elle ira rencontrer MQ en un point C qui ſera à la développée.

Car à cauſe des paralleles MRG, TAQ, l'on aura $MR(dx) + \overline{m+1}RG\left(\frac{dy^2}{dx}\right) . MG\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right) :: TA + \overline{m+1}AQ . TQ :: AM(y) . ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}dy^2}$.

EXEMPLE VIII.

93. SOIT AMD une demi-roulette ſimple, dont la baſe BD eſt égale à la demi-circonférence BEA du cercle générateur. FIG. 83.

Ayant nommé AP, x; PM, y; l'arc AE, u; & le diametre $AB, 2a$; l'on aura par la proprieté du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du ſa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en ſuppoſant dx conſtante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$; & en mettant ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, il vient * $MC = 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'eſt-à-dire $2BE$ ou $2MG$. * *Art.* 78.

Si l'on fait $x = o$, l'on aura $AN = 4a$ pour rayon de la développée dans le ſommet A. Mais ſi l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la développée au point D devient nul ou zero; d'où l'on voit que la développée a ſon origine en D, & qu'elle ſe termine en N en ſorte que $BN = BA$.

Pour ſçavoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle BS, décrire le demi cercle DIS qui a pour diametre DS, & mener DI parallele à MC ou à BE. Cela fait, il eſt clair que l'angle BDI eſt égal à l'angle EBD; & par conſequent que les arcs DI, BE ſont égaux entr'eux; d'où il ſuit que leurs cordes DI, BE ou GC ſont

auſſi égales. Si donc l'on fait IC, elle ſera égale & parallele à DG, qui par la génération de la roulette eſt égale à l'arc BE ou DI; & partant la développée DCN eſt une demi-roulette qui a pour baſe la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de ſon cercle générateur: c'eſt-à-dire que c'eſt la demi-roulette même $AMDB$ poſée dans une ſituation renverſée.

COROLLAIRE.

*Art. 75. 94. IL eſt clair *que la portion de roulette DC eſt double de ſa tangente CG, ou de la corde correſpondante DI. Et la demi roulette DCN double du diametre BN ou DS de ſon cercle générateur.

AUTRE SOLUTION.

95. ON peut encore trouver la longueur du rayon MC ſans aucun calcul, en cette ſorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiére, une autre parallele me, une autre corde Be, & décrit des centres C, B les petits arcs GH, EF, on formera les triangles réctangles GHg, EFe qui ſeront égaux & ſemblables; car $Gg = Ee$, puiſque BG ou ME eſt égal à l'arc AE, & de même Bg ou me eſt égal à l'arc Ae; de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou $Be - BE$; GH ſera donc égal à EF. Or les perpendiculaires MC, mC, étant paralleles aux cordes EB, eB, l'angle MCm ſera égal à l'angle EBe. Donc puiſque les arcs GH, EF, qui meſurent ces angles, ſont égaux, il s'enſuit que leurs rayons CG, BE ſeront auſſi égaux; & partant que MC doit être priſe double de MG ou de BE.

LEMME.

96. S'IL *y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. ſoit que ce nombre ſoit fini ou infini, ſoit que ces quantités ſoient des lignes, ou des ſurfaces, ou des ſolides; la ſomme* a — b + b — c + c — d + d — e, *&c. de toutes leurs différences eſt égale à la plus grande* a, *moins la plus*

petite c, *ou ſimplement à la plus grande lorſque la plus petite eſt zero.* Ce qui eſt viſible.

COROLLAIRE I.

97. LES ſécteurs CMm, CGH, étant ſemblables, il eſt clair que Mm eſt double de GH ou de ſon égale EI ; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point M, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits arcs Mm, c'eſt-à-dire la portion Am de la demi-roulette AMD, eſt double de la ſomme de tous les petits arcs EF. Or le petit arc EF fait partie de la corde AE perpendiculaire ſur BE, & eſt la différence des cordes AE, Ae, parceque la petite droite eF perpendiculaire ſur Ae peut être conſiderée comme un petit arc décrit du centre A ; & partant la ſomme de tous les petits arcs EF dans l'arc AZE ſera la ſomme des différences de toutes les cordes AE, Ae, &c. dans cet arc, c'eſt-à-dire par le Lemme qu'elle ſera égale à la corde AE. Il eſt donc évident que la portion AM de la demi-roulette AMD eſt double de la corde correſpondante AE.

COROLLAIRE II.

98. L'ESPACE $MGgm$ * ou le trapéze $MGHm$ $= \overline{\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}GH} \times MG = \frac{1}{2}EF \times BE$, c'eſt à dire qu'il eſt triple du triangle EBF ou EBe ; d'où il ſuit que l'eſpace $MGBA$ ſomme de tous ces trapézes, eſt triple de l'eſpace circulaire $BEZA$ ſomme de tous ces triangles. *Art. 2.

EXEMPLE III.

99. NOMMANT BP, z ; l'arc AZE ou EM ou BG, u ; & le rayon KA, a ; l'on aura le parallelélogramme $MGBE = uz$. Or l'eſpace de la roulette $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \frac{1}{2}au$; & partant l'eſpace $AMEB$ renfermé par la portion de roulette AM, la parallele ME, la corde BE & le diametre AB, eſt $= 3EKB + \frac{1}{2}au - uz$. D'où il

ſuit que ſi l'on prend $BP(z) = \frac{1}{2}a$, l'eſpace $AMEB$ ſera triple du triangle correſpondant EKB ; & aura par conſéquent ſa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que M. *Hugens* a remarque le premier. Voici encore une autre ſorte d'eſpace qui a la même proprieté.

Si l'on retranche de l'eſpace $AMEB$ le ſegment $BEZA$, il reſtera l'eſpace $AZEM = 2EKB + au - uz$; d'où l'on voit que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace $AZEM$ ſera égal au quarré du rayon. Il eſt évident qu'entre tous les eſpaces $AMEB$ & $AZEM$, il n'y a que les deux que l'on vient de déterminer qui ayent leur quadrature abſoluë indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

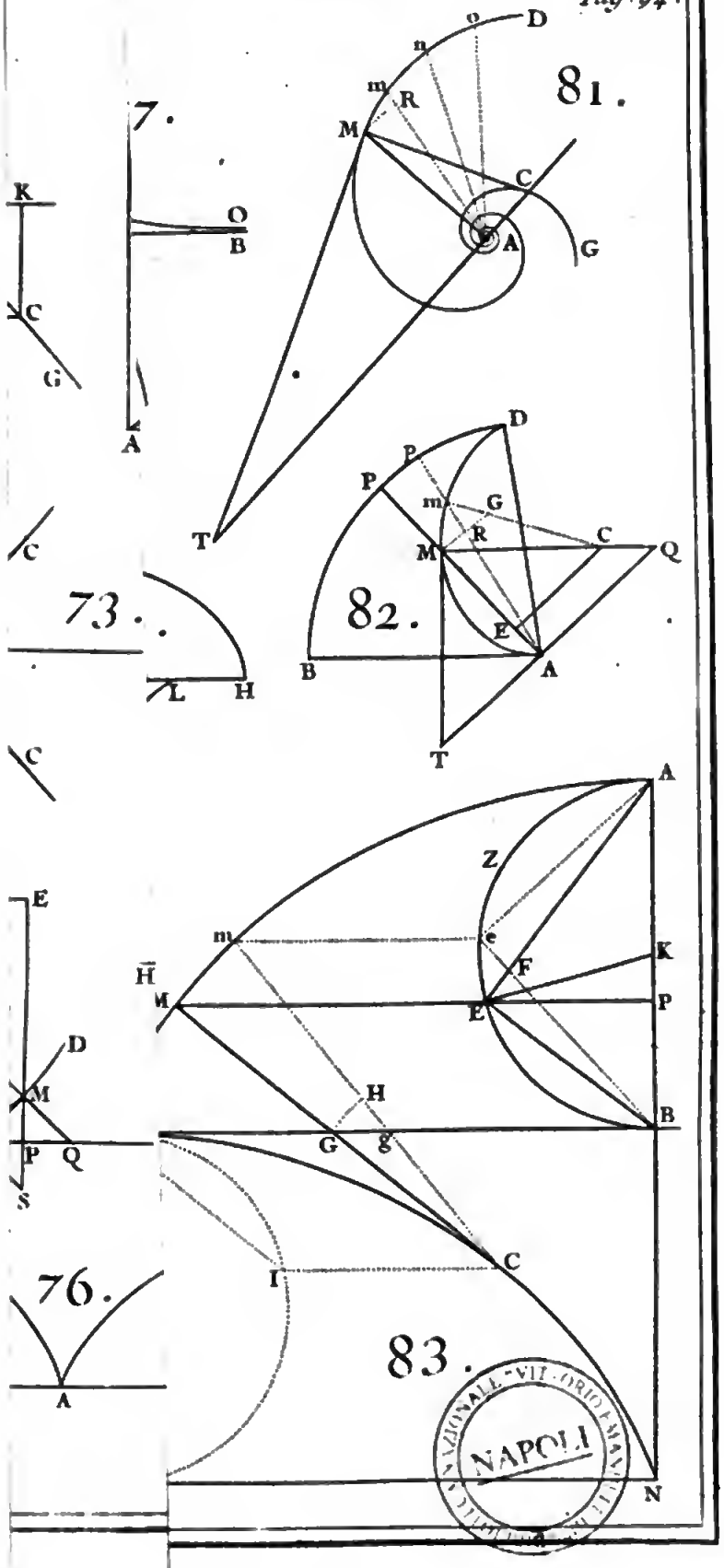
FIG. 84. **100.** SOIT la demi-roulette AMD décrite par la révolution du demi cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD ; & qu'il faille déterminer ſur la perpendiculaire MG donnée de poſition, le point où elle touche la dévelopée.

Pour ſe ſervir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD, des lignes droites perpendiculaires ſur l'axe OA, & chercher enſuite une équation qui exprimât la relation des coupées aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en ſeroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces ſortes de rencontres en tenter la ſolution en ſe ſervant de la génération même.

Lorſque le demi-cercle AEB eſt parvenu dans la poſition MGB dans laquelle il touche en G la baſe BD ; & que le point décrivant A tombe ſur le point M de la demi-roulette AMD : il eſt clair,

1°. Que l'arc GM eſt égal à l'arc GD, comme auſſi l'arc GB du cercle mobile à l'arc GB du cercle immobile.

* *Art.* 43. 2°. Que MG eſt * perpendiculaire ſur la courbe ; car conſidérant la demi-circonférence MGB ou AEB, & la baſe BGD comme l'aſſemblage d'une infinité de petites


77.
K
C
G
O
B
A
81.
o
D
n
m
R
M
C
A
G
T
82.
D
P
P
m
G
R
C
M
Q
E
B
A
T
73.
C
L
H
C
E
D
M
P
Q
S
76.
A
A
Z
m
e
K
H
F
M
E
P
B
H
G
g
C
I
83.
N

NAPOLI

droites égales chacune à ſa correſpondante, il eſt manifeſte que la demi-roulette AMD ſera l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centres ſucceſſivement tous les points touchans G, & qui ſeront décrits chacun par le même point M ou A.

3°. Que ſi l'on décrit du centre O du cercle immobile l'arc concentrique ME; les arcs MG, EB du cercle mobile ſeront égaux entr'eux, auſſi-bien que leurs cordes MG, EB & les angles OGM, OBE. Car les droites OK, OK qui joignent les centres des deux cercles ſont égales, puiſqu'elles paſſent par les points touchans B, G; c'eſt pourquoi menant les rayons OM, OE, & KE, on formera les triangles OKM, OKE égaux & ſemblables. L'angle OKM étant donc égal à l'angle OKE; les arcs MG, BE des demi-cercles égaux MGB, BEA, qui meſurent ces angles, ſeront égaux, comme auſſi leurs cordes MG, EB; d'où il ſuit que les angles OGM, OBE le ſeront auſſi.

Cela poſé, ſoit entenduë une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiere, un autre arc concentrique me, & une autre corde Be; ſoient décrits des centres C, B, les petits arcs GH, EF. Les triangles réctangles GHg, EFe ſeront égaux & ſemblables; car Gg ou $Dg - DG = Ee$ ou à l'arc Be — l'arc BE, de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou à $Be - BE$. Le petit arc GH ſera donc égal au petit arc EF; d'où il ſuit que l'angle GCH eſt à l'angle EBF, comme BE eſt à CG. Ainſi toute la difficulté ſe réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui ſe fait en cette ſorte. FIG. 85.

Ayant mené les rayons OG, Og, KE, Ke, & nommé OG ou OB, b; KE ou KB ou KA, a; il eſt clair que l'angle $EBe = OBe - OBE = Ogm - OGM =$ (en menant GL, GV paralleles à Cm, Og) $LGM - OGV = GCH - GOg$. On aura donc l'angle $GCH = GOg + EBF$. Or les arcs Gg, Ee étant égaux, l'on aura auſſi $GOg . EKe$ ou $2EBF :: KE(a) . OG(b)$; & partant l'angle $GOg = \frac{2a}{b} EBF$, & $GCH = \frac{2a+b}{b} EBF$. Donc $GCH . EBF$ ou $BE . CG :: \frac{2a+b}{b} . 1$.

& partant l'inconnue $CG = \frac{b}{2a+b} BE$ ou MG. Ce qui donne cette conſtruction.

FIG. 86. Soit fait $OA(2a+b).OB(b) :: MG.GC$; le point C ſera à la developée.

Il eſt clair 1°. Que cette dévelopée commence au point D, & qu'elle y touche la baſe BGD; puiſque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle ſe termine au point N, en ſorte que $OA.OB :: AB.BN :: OA-AB$ ou $OB.OB-BN$ ou ON; c'eſt-à-dire que OA, OB, ON ſont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à préſent le cercle NSQ du centre O, je dis que la dévelopée DCN eſt formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diametre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ: c'eſt à dire qu'elle eſt une demi-roulette ſemblable à la propoſée, ou de même eſpece (parceque les diametres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & poſée dans une ſituation renverſée en ſorte que ſon ſommet eſt en D. Pour le prouver, ſuppoſons que les diametres des cercles mobiles ſe trouvent ſur la droite OT menée à diſcrétion du centre O; elle paſſera par les points touchans S, G; & faiſant AB ou $TG.BN$ ou $GS :: MG.GC$, le point C ſera à la dévelopée, & de plus à la circonférence du cercle GCS; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le ſera auſſi. Or à cauſe des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB eſt à l'arc CS, comme le diametre GT au diametre $GS :: OG.OS :: GB.NS$; & partant les arcs CS, SN ſont égaux. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

*Art. 75. 101. IL eſt clair *que la portion de roulette DC eſt égale à la droite CM; & partant que DC eſt à ſa tangente $CG :: AB+BN.BN :: OB+ON.ON$; c'eſt à dire comme la ſomme des diametres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, eſt au rayon du cercle immobile. Cette verité ſe découvre encore de la maniére

niére qui ſuit. A cauſe des triangles ſemblables CMm, CGH, l'on aura $Mm.GH$ ou $EF :: MC.GC :: OA+OB\ (2a+2b).OB\ (b)$. D'où il ſuit (comme dans l'art. 97.) que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante AE, comme la ſomme des diametres du cercle générateur & de la baſe, eſt au rayon de la baſe. Fig. 85.

COROLLAIRE II.

102. LE trapéze $MGHm = \frac{1}{2}\overline{GH+Mm} \times MG$. Or $CG(\frac{b}{2a+b}MG).CM(\frac{2a+2b}{2a+b}MG) :: GH.Mm = \frac{2a+2b}{b}GH$. Donc puiſque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{2a+3b}{2b}EF \times EB$: c'eſt à dire que le trapéze $MGHm$ ſera toujours au triangle correſpondant $EBF :: 2a+3b.b$. Fig. 85.

D'où il ſuit que l'eſpace $MGBA$ renfermé par MG, AB perpendiculaires à la roulette, par l'arc BG & par la portion de roulette MA, eſt au ſegment de cercle correſpondant $BEZA :: 2a+3b.b$.

COROLLAIRE III.

103. IL eſt viſible que la quadrature indéfinie de la roulette dépend de la quadrature du cercle; mais ſi l'on prend OQ moyenne proportionnelle entre OK, OA, & qu'on décrive de ce rayon l'arc QEM; je dis que l'eſpace $ABEM$ renfermé par le diametre AB, la corde BE, l'arc EM, & par la portion de roulette AM, eſt au triangle $EKB :: 2a+3b.b$. Car nommant l'arc AE ou GB, u; le rayon OQ, z; l'on aura $OB\ (b).OQ\ (z) :: GB\ (u).RQ$ ou $ME = \frac{uz}{b}$. & partant l'eſpace $RGBQ$ ou $MGBE$, c'eſt à dire $\frac{1}{2}\overline{GB+RQ} \times BQ = \frac{zzu-bbu}{2b}$. Or* l'eſpace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} \times BEZA = \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA\ (\frac{zu}{2})$. Si donc l'on retranche le précédent eſpace de celui-ci, il reſtera $ABEM = \frac{2azu+3bzu+bbu-3zu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB$ Fig. 87. * *Art.* 102.

$= \frac{2a+3b}{b} EKB$, puiſque par la conſtruction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet eſpace a ſa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il eſt le ſeul parmi tous ſes ſemblables.

En voici encore un autre qui a la même proprieté. Si l'on retranche de l'eſpace $ABEM$ le ſegment $BEZA$ ($\frac{1}{2}au + EKB$), il reſtera l'eſpace $AZEM = \frac{2aau+2abu+bbu-zzu}{2b} + \frac{2a+2b}{b} EKB = \frac{2a+2b}{b} EKB$ en faiſant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'eſt à dire que ſi l'on diviſe la demi-circonférence en deux également au point E, l'eſpace $AZEM$ ſera au double du triangle EKB, c'eſt à dire au quarré du rayon $:: OK\,(a+b).OB\,(b)$.

COROLLAIRE IV.

FIG. 88. 104. SI le cercle mobile AEB roule au dedans de l'immobile BGD, ſon diametre AB devient négatif de poſitif qu'il étoit auparavant; & partant il faut changer de ſignes les termes où il ſe rencontre avec une dimenſion impaire. D'où il ſuit, 1°. Que ſi l'on mene à diſcrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on faſſe $OA\,(b-2a).OB\,(b) :: MG.GC$. le point C ſera * à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diametre BN, au dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que ſi l'on décrit du centre O l'arc ME, la portion de roulette AM ſera * à la corde $AE :: 2b-2a.b$. 3°. Que l'eſpace $MGBA$ eſt * au ſegment $BEZA :: 3b-2a.b$. 4°. Que ſi l'on prend $OQ = \sqrt{2aa-3ab+bb}$, c'eſt à dire moyenne proportionnelle entre OK, OA; l'eſpace $ABEM$ renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la corde EB, & le diametre AB, ſera * au triangle $EKB :: 3b-2a.b$. Mais que ſi l'on fait OQ ou $OE = \sqrt{2aa-2ab+bb}$, c'eſt à dire que l'arc AE ſoit le quart de la circonférence; l'eſpace $AZEM$ renfermé par la portion AM de roulette & par les deux arcs ME, AE, ſera * au triangle EKB qui eſt en ce cas la moitié du quarré du rayon $:: 2b-2a.b$.

* *Art.* 100.

* *Art.* 101.

* *Art.* 102.

* *Art.* 103.

* *Ibid.*

COROLLAIRE V.

105. SI l'on conçoit que le rayon OB du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diametre AB du cercle mobile eſt nul par rapport à celui de l'immobile; il s'enſuit, 1°. Que $MG.GC :: b.b$. Puiſque $b \pm 2a = b$, c'eſt à dire que $MG = GC$; & partant que ſi l'on prend $BN = AB$, & qu'on mene la droite NS parallele à BD, la développée DCN ſera formée par la révolution du cercle, qui a pour diametre BN, ſur la baſe NS. 2°. Que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante $AE :: 2b.b$. 3°. Que l'eſpace $MGBA$ eſt au ſegment $BEZA :: 3b.b$. 4°. Puiſque BQ ou $\pm OQ \mp OB$, que j'apelle x, eſt $= \mp b \pm \sqrt{2aa \mp 3ab + bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommenſurables) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; l'on aura $x = \frac{3}{2}a$, en effaçant les termes où b ne ſe rencontre point, parcequ'ils ſont nuls par rapport aux autres. C'eſt à dire que ſi l'on prend dans la roulette ordinaire $BP = \frac{1}{4}AB$, & qu'on mene la droite PEM parallele à la baſe BD; l'eſpace $AMEB$ ſera triple du triangle EKB On trouvera en opérant de la même maniére, que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace $AZEM$ renfermé par la portion de roulette AM, la droite ME, & l'arc AE, ſera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déja démontré ci devant art. 99.

Fig. 86. 88. Fig. 85. 88. Fig. 87. 88. Fig. 81.

REMARQUE.

106. COMME les arcs DG, GM ſont toujours égaux entr'eux, il s'enſuit que l'angle DOG eſt auſſi toujours à l'angle $GKM :: GK.OG$. C'eſt pourquoi l'origine D de la roulette DMA, les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, ſi l'on veut déterminer dans cette poſition le point M qui décrit la roulette, il ne faut que

Fig. 84.

tirer le rayon *KM* en ſorte que l'angle *GKM* ſoit à l'angle donné *DOG* :: *OG* . *GK*. Or je dis maintenant que cela ſe peut toujours faire géométriquement lorſque le rapport de ces rayons ſe peut exprimer par nombres ; & partant que la roulette *DMA* eſt alors géométrique.

Car ſuppoſant, par éxemple, que *OG* . *GK* :: 13 . 5 ; il eſt clair que l'angle *MKG* doit contenir deux fois l'angle donné *DOG* & de plus $\frac{3}{5}$ de cet angle. Toute la difficulté ſe réduit donc à diviſer l'angle *DOG* en cinq parties égales. Or c'eſt une choſe connue par les Geométres, qu'on peut toujours diviſer geométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra ; puiſqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette *DMA* eſt mécanique, ou ce qui eſt la même choſe, qu'on ne peut déterminer geométriquement ſes points *M* lorſque la raiſon de *OG* à *KG* ne ſe peut exprimer par nombres, c'eſt à dire lorſqu'elle eſt ſourde.

Car toute ligne, ſoit mécanique ſoit geométrique, où
Fig. 89. rentre en elle-même ou s'étend à l'infini ; puiſqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile *ABC* décrit par ſon point *A* dans ſa premiere révolution la roulette *ADE*, cette roulette ne ſera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la ſeconde *EFG*, puis la troiſiéme *GHI*, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que le point décrivant *A* retombe après pluſieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors ſi on recommence à rouler le cercle mobile *ABC*, il décrira derechef la même ligne courbe, de ſorte que toutes ces roulettes priſes enſemble ne compoſent qu'une ſeule courbe *ADEFGHI*, &c. Or les rayons des cercles, générateurs étant incommenſurables, leurs circonférences le ſeront auſſi ; & par conſéquent le point décrivant *A* du cercle mobile *ABC* ne pourra jamais retomber dans le point *A* de l'immobile, d'où il étoit parti, ſi grand que

puiſſe être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe *ADEFGHI*, &c. Maintenant ſi l'on mene au travers dú cercle immobile une ligne droite indéfinie, il eſt clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne geométrique doit avoir au moins autant de dimenſions que cette ligne peut être coupée en de différens points par une droite; il s'enſuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimenſions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou tranſcendente.

PROPOSITION III.

Problême.

107. LA *ligne courbe* BFC *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle ſoit la développée commune.* FIG. 90.

Si l'on dévelope la courbe *BFC* en commençant par le point *A*, il eſt clair que tous les points *A*, *B*, *F*, du fil *ABFC* décriront dans ce mouvement des lignes courbes *AM*, *BN*, *FO*, qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée *BFC*. Mais il faut obſerver que la ligne *FO* n'ayant pour développée que la partie *FC*, ſon origine n'eſt pas en *F*; & que pour la trouver, il faut développer la partie reſtante *BF* en commençant au point *F* pour décrire la portion *EF* de la courbe *EFO* dont l'origine eſt en *E*, & qui a pour développée la courbe entiére *BFC*.

Si l'on veut trouver les points *M*, *N*, *O* ſans ſe ſervir du fil *ABFC*, il n'y a qu'à prendre ſur une tangente quelconque *CM* autre que *BA*, les parties *CM*, *CN*, *CO* égales à *ABFC*, *BFC*, *FC*.

COROLLAIRE.

108. IL eſt évident, 1°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ſont d'une nature très différente entr'elles; puiſque la courbe *AM* a dans ſon ſommet *A* le rayon de ſa dévelopée égal à *AB*, au lieu que celui de la courbe *BN* eſt nul. Il eſt viſible auſſi par la figure même de la courbe *EFO* qu'elle eſt très différente des courbes *AM*, *BN*.

2°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ne ſont geométriques que lorſque la donnée *BFC* eſt geométrique & de plus réctifiable. Car ſi elle n'eſt pas geométrique, en prenant *BK* pour la coupée, on ne trouvera point geométriquement l'appliquée *KC*: & ſi elle n'eſt pas rectifiable, ayant mené la tangente *CM*, on ne pourra déterminer geométriquement les points *M*, *N*, *O* des courbes *AM*, *BN*, *EFO*; puiſqu'on ne peut trouver geométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe *BFC*, & à ſes portions *BF*, *FC*.

REMARQUE.

FIG. 91. 109. SI l'on dévelope une ligne courbe *BAC* qui ait un point d'infléxion en *A*, en commençant par le point *D* autre que le point d'infléxion; on formera par le dévelopement de la partie *BAD* la partie *DEF*; & par celui de la partie *DC*, la partie reſtante *DG*: de ſorte que *FEDG* ſera la courbe entiere formée par le dévelopement de *BAC*. Or il eſt viſible que cette courbe rebrouſſe chemin aux points *D* & *E*, avec cette difference qu'au point de rebrouſſement *D* les parties *DE*, *DG* ont leur convexité oppoſée l'une à l'autre; au lieu qu'au point *E* les parties *DE*, *EF* ſont concaves vers le même côté. On a enſeigné dans la ſection précedente à trouver les points de rebrouſſement tels que *D*: il eſt queſtion maintenant de déterminer les points *E*, qu'on peut appeller points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte, & que perſonne, que je ſçache, n'a encore conſideré.

Pour en venir à bout, on menera à diſcretion ſur la

partie DE deux perpendiculaires MN, mn, terminées par la développée aux points N, n, par leſquels on tirera deux autres perpendiculaires NH, nH ſur les premieres NM, nm; ce qui formera deux petits ſecteurs MNm, NHn qui ſeront ſemblables, puiſque les angles MNm, NHn ſont égaux. On aura donc $Nn . Mm :: NH . NM$. Or dans le point d'infléxion A le rayon NH devient * infini ou zero; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebrouſſement E de la ſeconde ſorte, la raiſon de la différence Nn du rayon MN de la développée, à la différence Mm de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant * *Art.* 81.

puiſque * $Nn = \frac{-3dxdyddy\sqrt{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy\sqrt{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$, & * *Art.* 86.

$Mm = \sqrt{dx^2+dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2}{dxddy^2} = 0$ ou ∞; & multipliant par $dxddy^2$, on trouvera la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$ ou ∞, qui ſervira à déterminer les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte.

On peut encore concevoir qu'une rebrouſſante DEF ou $HDEFG$ de la ſeconde ſorte, ait pour développée une autre rebrouſſante BAC de la ſeconde ſorte, telle que ſon point de rebrouſſement A réponde au point de rebrouſſement E, c'eſt à dire qu'il ſoit ſitué ſur le rayon de la développée qui part du point E. Or il eſt clair dans cette ſuppoſition, que le rayon EA de la développée ſera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la différence de $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ expreſſion générale * des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E; ce qui donne la même formule qu'auparavant: de ſorte qu'elle eſt générale pour trouver les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte. FIG. 92. 93. * *Art.* 78.

SECTION VI.

Uſage du calcul des differences pour trouver les Cauſtiques par réfléxion.

DE'FINITION.

FIG. 94. 95. SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, qui partent d'un point lumineux B, ſe réfléchiſſent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en ſorte que les angles de réfléxion ſoient égaux aux angles d'incidence ; la ligne HFN, que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongemens AH, MF, DN, eſt appellée *Cauſtique par réfléxion.*

COROLLAIRE I.

FIG. 94. 110. SI l'on prolonge HA en I, de ſorte que $AI=AB$, & que l'on dévelope la cauſtique HFN en commençant au point I; on décrira la courbe ILK telle que la tangente FL ſera *continuellement égale à la portion FH de la cauſtique plus à la droite HI. Et ſi l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi Bm, mF infiniment près de BM, MF, & qu'ayant prolongé Fm en l, on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR: on formera les petits triangles réctangles MOm, MKm, qui ſeront ſemblables & égaux ; car puiſque l'angle $OmM=FmD=RmM$, & que de plus l'hypotenuſe Mm eſt commune, les petits côtés Om, Rm ſeront égaux entr'eux. Or puiſque Om eſt la différence de LM, & Rm celle de BM, & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M ; il s'enſuit que $ML-IA$ ou $AH+HF-MF$ ſomme * de toutes les différences Om dans la portion de courbe AM, eſt $= BM-BA$ ſomme * de toutes les différences Rm dans la même portion AM. Donc la portion HF de la cauſtique HFN ſera égale à $BM-BA+MF-AH$.

*Art. 75.

*Art. 96.

*Art. 96.

Il peut arriver différens cas, ſelon que le rayon incident BA eſt plus grand ou moindre que BM, & que le réfléchi

réfléchi AH dévelope ou envelope la portion HF pour parvenir en MF : mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la difference des rayons incidens eſt égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la cauſtique qu'il dévelope avant que de tomber ſur l'autre. Par éxemple, $BM-BA=MF+FH-AH$; d'où l'on tire $FH=BM-BA+AH-MF$. Fig. 95.

Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle AP; il eſt clair que PM ſera la différence des rayons incidens BM, BA. Et ſi l'on ſuppoſe que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire ſur ces rayons. Fig. 94. 95. Fig. 96.

COROLLAIRE II.

III. SI l'on conçoit que la figure $BAMD$ ſoit renverſée ſur le même plan, en ſorte que le point B tombe ſur le point I, & qu'ainſi la tangente en A de la courbe AMD dans ſa premiere ſituation, la touche encore dans cette nouvelle ; & qu'on faſſe rouler la courbe aMd ſur AMD, c'eſt à dire ſur elle même, en ſorte que les portions aM, AM ſoient toujours égales : je dis que le point B décrira dans ce mouvement une eſpece de roulette ILK qui aura pour dévelopée la cauſtique HFN. Fig. 94.

Car il ſuit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée du point décrivant L au point touchant M ſera * perpendiculaire à la courbe ILK. 2°. Que La ou $IA=BA$, & $LM=BM$. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM ſur la tangente commune en M ſont égaux ; & partant que ſi l'on prolonge LM en F, le rayon MF ſera le réfléchi de l'incident BM. D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la cauſtique HFN : & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point L, il s'enſuit que la courbe ILK eſt formée par le dévelopement de la cauſtique HFN, plus la droite HI. *Art. 43.

Il ſuit de ceci que la portion FH ou $FL-HI=BM$

$+MF-BA-AH$. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre maniére dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM; il eſt clair que le point touchant N, & celui d'interſection V ſe confondront avec l'autre point touchant F: de ſorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la cauſtique HFN, il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF, mF. Et en effet, ſi l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les interſections des réfléchis un poligone d'une infinité de côtés dont l'aſſemblage compoſera la cauſtique HFN.

PROPOSITION I.

Problême général.

FIG. 97. 113. *LA nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver ſur le réfléchi* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique.*

Ayant trouvé par la ſection précédente la longueur MC du rayon de la développée au point M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg ſur les rayons incidens & réfléchis; enſuite on nommera les données BM, y; ME ou MG, a.

Cela poſé, on prouvera, comme dans le Corollaire pré-
Art. 110. mier, que les triangles MRm, MOm ſont ſemblables & égaux; & qu'ainſi $MR=MO$. Or à cauſe de l'égalité des angles d'incidence & de réfléxion, l'on a auſſi $CE=CG$, $Ce=Cg$; & partant $CE-Ce$ ou $E\mathcal{Q}=CG-Cg$ ou SG. Donc à cauſe des triangles ſemblables BMR & $BE\mathcal{Q}$, FMO & FGS, l'on aura $BM+BE(2y-a).BM(y) :: MR+E\mathcal{Q}$

ou $MO + GS . MR$ ou $MO :: MG\ (a) . MF = \frac{ay}{2y - a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B; y deviendroit négative de poſitive qu'elle étoit, & l'on auroit par conſéquent $MF = \frac{-ay}{-2y - a}$ ou $\frac{ay}{2y + a}$.

Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie, c'eſt à dire que le point B ſoit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens ſeront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{1}{2}a$, parceque a eſt nulle par rapport à $2y$. Fig. 96.

Corollaire I.

114. Comme l'on ne trouve pour MF qu'une ſeule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée; il s'enſuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une ſeule cauſtique HFN par réfléxion, puiſqu'elle* n'a qu'une ſeule développée. Fig. 94. 95. *Art. 80.

Corollaire II.

115. Lorsque AMD eſt géométrique, il eſt clair* que ſa développée l'eſt auſſi, c'eſt à dire que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il ſuit que tous les points F de ſa cauſtique ſeront auſſi déterminés géométriquement, c'eſt à dire que la cauſtique HFN ſera géométrique. Mais je dis de plus, que cette cauſtique ſera toujours réctifiable; puiſqu'il eſt évident* que l'on peut trouver avec le ſecours de la courbe AMD, qu'on ſuppoſe géométrique, des lignes droites égales à une de ſes portions quelconque. *Art. 85. Fig. 97. Fig. 94. 95. *Art. 110.

Corollaire III.

116. Si la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B; la valeur de $MF\ (\frac{ay}{2y + a})$ ſera toujours poſitive; & il faudra prendre par conſéquent le point F du Fig. 97.

côté du point C, par rapport au point M, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront divergens.

Mais ſi la courbe AMD eſt concave vers le point lumineux B, la valeur de $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right)$ ſera poſitive lorſque y ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$, négative lorſqu'il eſt moindre, & infinie lorſqu'il eſt égal. D'où il ſuit que ſi l'on décrit un cercle qui ait pour diamétre la moitié du rayon MC de la dévelopée, les rayons réfléchis infiniment proches ſeront convergens lorſque le point lumineux B tombe au dehors de ſa circonférence, divergens lorſqu'il tombe au dedans, & enfin paralleles lorſqu'il tombe deſſus.

COROLLAIRE IV.

117. SI le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura $ME\,(a)=o$; & partant $MF=o$. Or comme le rayon réflechi eſt alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la cauſtique conſiſte à toucher tous les rayons refléchis; il s'enſuit qu'elle touchera auſſi le rayon incident BM au point M: c'eſt à dire que la cauſtique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur ſera commun.

Si le rayon MC de la dévelopée eſt nul, on aura encore $ME\,(a)=o$; & partant $MF=o$. D'où l'on voit que la donnée & la cauſtique font entr'elles dans le point M qui leur eſt commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la dévelopée eſt infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura $MF=\mp y$; puiſque $ME\,(a)$ étant infinie, y ſera nul par rapport à a. Or comme cette valeur eſt négative lorſque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD, & poſitive lorſqu'il tombe du côté oppoſé; il s'enſuit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront toujours divergens lorſque la ligne AMD eſt droite.

COROLLAIRE V.

118. IL eſt évident que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on trouvera facilement le troiſiéme.

Soit, 1°, la courbe AMD une parabole qui ait pour foyer le point lumineux B. Il eſt clair par les élémens des ſections coniques, que tous les rayons réfléchis ſeront paralleles à l'axe ; & partant que MF ſera toujours infinie en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point M. On aura donc $a = 2y$: d'où il ſuit que ſi l'on prend ME double de MB, & qu'on mene la perpendiculaire EC ; elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe AMD, en un point C qui ſera à la dévelopée de cette courbe. Fig. 98.

Soit 2°. la courbe AMD une ellipſe qui ait pour un de ſes foyers le point lumineux B. Il eſt encore clair que tous les rayons réfléchis MF ſe rencontreront dans un même point F qui ſera l'autre foyer. Et ſi l'on nomme MF, z ; l'on aura* $z = \frac{ay}{2y-a}$; d'où l'on tire la cherchée $ME(a) = \frac{2yz}{y+z}$ Fig. 99. * *Art.* 113.

Mais ſi la courbe AMD eſt une hyperbole, le foyer F tombera de l'autre côté ; & partant $MF(z)$ deviendra négative : d'où il ſuit qu'on aura alors $ME(a) = \frac{-2yz}{y-z}$ ou $\frac{2yz}{z-y}$. Ce qui donne cette conſtruction qui ſert auſſi pour l'ellipſe. Fig. 110.

Soit priſe ME quatriéme proportionnelle au demi-axe traverſant, & aux rayons incident & réfléchi ; ſoit menée la perpendiculaire EC : elle ira couper la ligne MC perpendiculaire à la ſection, en un point C qui ſera à la développée. Fig. 99. 100.

EXEMPLE I.

119. SOIT la courbe AMD une parabole, dont les rayons incidens PM ſoient perpendiculaires ſur ſon axe AP. Il faut trouver ſur les réfléchis MF les points F où ils touchent la cauſtique AFK. Fig. 101.

Il eſt clair que ſi l'on mene le rayon MC de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire CG ſur le rayon réfléchi MF, il faudra * prendre MF égale à la moitié de MG. Mais cette conſtruction ſe peut abréger, en conſidérant que ſi l'on mene MN parallele à l'axe AP, & la droite ML au foyer L; les angles LMP, FMN ſeront égaux, puiſque par la propriété de la parabole $LMQ = QMN$, & par la ſuppoſition $PMQ = QMF$. Si donc l'on ajoûte de part & d'autre le même angle PMF, l'angle LMF ſera égal à l'angle PMN, c'eſt à dire droit. Or l'on vient de démontrer * que LH perpendiculaire ſur ML rencontre le rayon MC de la développée en ſon milieu H. Si donc l'on mene MF parallele & égale à LH, elle ſera un des rayons réfléchis, & touchera en F la cauſtique AFK. Ce qu'il falloit trouver.

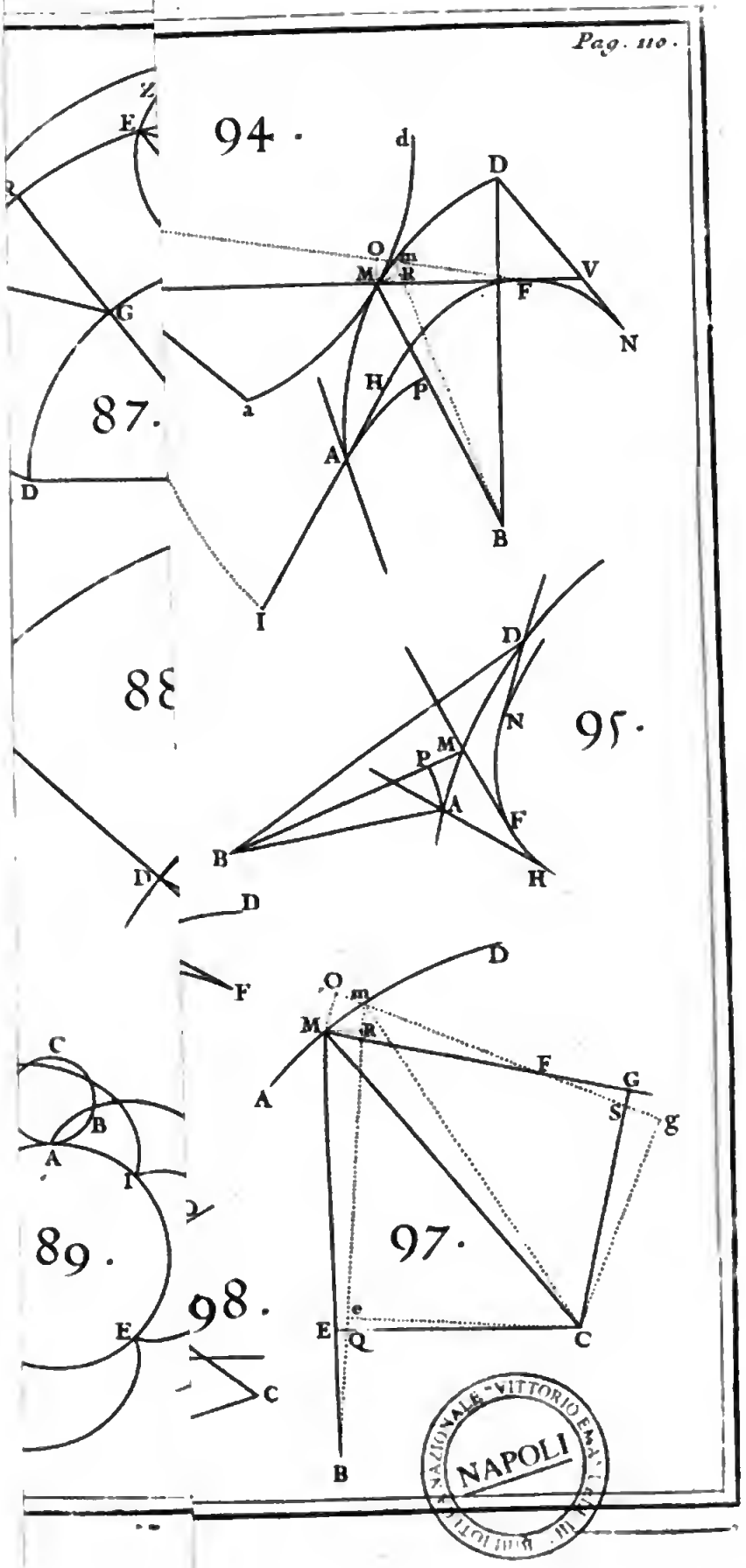
* *Art.* 113.

* *Art.* 118. *num.* 1.

Si l'on ſuppoſe que le rayon réfléchi MF ſoit parallele à l'axe AP, il eſt évident que le point F de la cauſtique ſera le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe AP, puiſque la tangente en ce point ſera parallele à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les cauſtiques, telles que AFK, formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à conſidérer que MP doit être alors égale à PQ. Ce qui donne $dy = dx$. Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire $AP\,(x) = \frac{1}{4}a$: c'eſt à dire que ſi le point P tombe au foyer L, le rayon réfléchi MF ſera parallele à l'axe. Ce qui eſt d'ailleurs viſible; puiſque dans ce cas MP ſe confondant avec LM, il faut auſſi que MF ſe confonde avec MN, & LH avec LQ. D'où l'on voit que MF eſt alors égale à ML; & partant que ſi l'on mene FR perpendiculaire ſur l'axe, on aura AR ou $AL + MF = \frac{1}{4}a$. On voit auſſi que la portion AF de la cauſtique eſt égale en ce cas au parametre, puiſ. qu'elle eſt toujours * égale à $PM + MF$.

* *Art.* 110.

Pour déterminer le point K où la cauſtique AFK rencontre l'axe AP, il faut chercher la valeur de MO, & l'é-


94.
87.
88
95.
89.
98.
97.
d
D
O
m
M
R
V
F
N
G
H
p
a
A
B
I
E
Z
C
Q
e
g
S
NAPOLI

galer à celle de MF; car il eſt viſible que le point F tombant en K, les lignes MF, MO deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue MO, t; l'angle PMO coupé en deux également par MQ perpendiculaire à la courbe, donnera $MP\ (y).\ MO\ (t) ::\ PQ\ (\frac{ydy}{dx}).$ $OQ = \frac{tdy}{dx}$. & partant $OP = \frac{tdy + ydy}{dx} = \sqrt{tt - yy}$, à cauſe du triangle réctangle MPO; & diviſant de part & d'autre par $t + y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$, d'où l'on tire $MO\ (t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2} = MF\ (\frac{1}{2}a) = \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}$, puiſque * $ME\ (a) = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$, qui ſervira à trouver le point P tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF, ce dernier touche la cauſtique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP.

* *Art.* 77.

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire $AP\ (x) = \frac{1}{4}$ du parametre.

Pour trouver la nature de la cauſtique AFK à la maniére de *Deſcartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée $AR\ (u)$, à l'appliquée $RF\ (z)$; ce qui ſe fait en cette ſorte. Puiſque $MO\ (t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}$, l'on aura $PO\ (\frac{tdy+ydy}{dx}) = \frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}$; & à cauſe des triangles ſemblables MPO, MSF, on formera ces proportions $MO\ (\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}).\ MF\ (\frac{dx^2+dy^2}{-2ddy})$ ou $-2yddy.\ dx^2 - dy^2 :: MP\ (y).\ MS\ (y-z) = \frac{dx^2-dy^2}{-2ddy} :: PO\ (\frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}).$ SF ou $PR\ (u-x) = \frac{dxdy}{-ddy}$. On aura donc ces deux

équations $z = y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$, & $u = x + \frac{dxdy}{-ddy}$, qui ſerviront avec celle de la courbe donnée à en former une nouvelle où x & y ne ſe trouveront plus, & qui exprimera par conſéquent la relation de AR (u) à FR (z).

Lorſque la courbe AMD eſt une parabole, comme l'on a ſuppoſé dans cet éxemple, on trouvera $z = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$, & $u = 3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{1}{4}aau$ qui exprime la nature de la cauſtique AFK. On peut remarquer que PR eſt toujours double de AP, puiſque AR $(u) = 3x$; ce qui fournit encore une nouvelle maniére de déterminer ſur le rayon réfléchi MF le point cherché F.

EXEMPLE II.

FIG. 102. 120. SOIT la courbe AMD un demi-cercle qui ait pour diametre la ligne AD, & pour centre le point C; ſoient les rayons incidens PM perpendiculaires ſur AD.

Comme la développée du cercle ſe réunit en un ſeul point qui en eſt le centre, il s'enſuit* que ſi l'on coupe le rayon CM en deux également au point H, & qu'on mene HF perpendiculaire ſur le rayon refléchi MF, il coupera ce rayon en un point F, où il touche la cauſtique AFK. Il eſt clair que le rayon réfléchi MF eſt égal à la moitié de l'incident PM; d'où il ſuit, 1°. Que le point P tombant en C, le point F tombe en K milieu de CB. 2°. Que la portion AF eſt triple de MF, & la cauſtique AFK triple de BK. On voit auſſi que ſi l'on fait l'angle ACM demi-droit, le rayon refléchi MF ſera parallele à AC; & partant que le point F ſera plus élevé au deſſus du diametre AD, que tout autre point de la cauſtique.

*Art. 113.

Le cercle qui a pour diametre MH, paſſe par le point F; puiſque l'angle HFM eſt droit. Et ſi l'on décrit du centre

tre *C* & du rayon *CK* ou *CH*, moitié de *CM*, le cercle *KHG*; l'arc *HF* ſera égal à l'arc *HK*: car l'angle *CMF* étant égal à *CMP* ou *HCK*, les arcs $\frac{1}{2}HF$, *HK* qui meſurent ces angles dans les cercles *MFH*, *KHG*, ſeront entr'eux comme les rayons $\frac{1}{2}MH$, *HC* de ces cercles. D'où l'on voit que la cauſtique *AFK* eſt une roulette formée par la révolution du cercle mobile *MFH* autour de l'immobile *KHG*, dont l'origine eſt en *K*, & le ſommet en *A*.

EXEMPLE III.

121. SOIT la courbe *AMD* un cercle qui ait pour diamétre la ligne *AD*, & pour centre le point *C*; ſoit le point lumineux *A*, d'où partent tous les rayons incidens *AM*, l'une des extrémités de ce diamétre. FIG. 103.

Si l'on mene du centre *C* ſur le rayon incident *AM* la perpendiculaire *CE*: il eſt clair par la proprieté du cercle, que le point *E* coupe en deux parties égales la corde *AM*; & qu'ainſi $ME\ (a) = \frac{1}{2}y$. On aura donc $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{3}y$: c'eſt à dire qu'il faut prendre le rayon réfléchi *MF* égal au tiers de l'incident *AM*. D'où l'on voit que $DK = \frac{1}{3}AD$, $CK = \frac{1}{3}CD$, & que * la cauſtique $AFK = \frac{4}{3}AD$, de même que ſa portion $AF = \frac{4}{3}AM$. Si l'on prend $AM = AC$, le rayon réfléchi *MF* ſera parallele au diamétre *AD*; & par conſéquent le point *F* ſera le plus élevé qu'il ſoit poſſible au deſſus de ce diamétre. * *Art.* 110.

Si l'on prend $CH = \frac{1}{3}CM$, & qu'on tire *HF* perpendiculaire ſur *MF*; le point *F* ſera à la cauſtique: car menant *HL* perpendiculaire ſur *AM*, il eſt clair que $ML = \frac{2}{3}ME = \frac{1}{3}AM$, puiſque $MH = \frac{2}{3}CM$. Le cercle qui a pour diamétre *MH*, paſſera donc par le point *F* de la cauſtique; & ſi l'on décrit un autre cercle *KHG* du centre *C*, & du rayon *CK* ou *CH*, il lui ſera égal, & l'arc *HK*

ſera égal à l'arc HF : car dans le triangle iſoſcele CMA l'angle externe $KCH = 2CMA = AMF$; & partant les arcs HK, HF meſures de ces angles dans des cercles égaux, ſeront auſſi égaux. D'où il ſuit que la cauſtique AFK eſt encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

On pourroit encore prouver ceci de cette autre maniére. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui ci, en commençant au point A ; l'on a démontré dans le Corollaire ſecond *qu'elle aura pour dévelopée la cauſtique AFK. Or * cette dévelopée eſt une roulette de même eſpece, c'eſt à dire que les diamétres des cercles générateurs en ſeront égaux ; & on déterminera le point K en prenant CK troiſiéme proportionnelle à $CD + DA$ & à CD, c'eſt à dire égale à $\frac{1}{2} CD$. Donc, &c.

*Art. 111.

*Art. 100.

EXEMPLE IV.

FIG. 104. 122. SOIT la courbe AMD une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi-cercle NGM ſur la droite BD, dont le ſommet eſt en A, & l'origine en D ; ſoient les rayons incidens KM paralleles à l'axe AB.

*Art. 95. *Art. 113. Puiſque *MG eſt égale à la moitié du rayon de la dévelopée, il s'enſuit * que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur le rayon réfléchi MF, le point F ſera à la cauſtique DFB. D'où l'on voit que MF doit être priſe égale à KM.

Si l'on mene du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G, & au point décrivant M, les rayons HG, HM ; il eſt clair que HG ſera perpendiculaire ſur BD, & que l'angle $GMH = MGH = GMK$: d'où l'on voit que le rayon réfléchi MF paſſe par le centre H. Or le cercle qui a pour diamétre GH, paſſe auſſi par le point F ; puiſque l'angle GFH eſt droit. Donc les arcs GN, $\frac{1}{2} GF$, meſures du même angle GHN, ſeront entr'eux comme les diamétres

MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc $GF = GN = GB$. Il eſt donc évident que la cauſtique DFB eſt une roulette décrite par la révolution entiere du cercle GFH ſur la droite BD.

EXEMPLE V.

123. SOIT encore la courbe AMD une demi roulette ordinaire, dont la baſe BD eſt égale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et ſoient à préſent les rayons incidens PM paralleles à la baſe BD. FIG. 105.

Si l'on mene GQ perpendiculaire ſur PM, les triangles réctangles GQM, BPN ſeront égaux & ſemblables; & partant $MQ = PN$. D'où l'on voit * qu'il faut prendre MF égale à l'appliquée correſpondante PN dans le demi-cercle générateur ANB. * *Art.* 95. 113.

Afin que le point F ſoit le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe AB, il faut que la tangente MF en ce point ſoit parallele à cet axe. L'angle PMF ſera donc alors droit, ſa moitié PMG ou PNB demi droit; & partant le point P tombera dans le centre du cercle AND.

C'eſt une choſe digne de remarque, que le point P approchant enſuite continuellement de l'extrémité B, le point F approche auſſi de l'axe AB juſqu'à un certain point K, après quoi il s'en éloigne juſqu'en D; de ſorte que la cauſtique $AFKFD$ a un point de rebrouſſement en K.

Pour le déterminer, je remarque * que la portion $AF = PM + MF$, la portion $AFK = HL + LK$, & la portion KF de la partie KFD, eſt $= HL + LK - PM - MF$: d'où l'on voit que $HL + LK$ doit être un *plus grand.* C'eſt pourquoi nommant AH, x; HI, y; l'arc AI, u; l'on aura $HL + LK = u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy = 0$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = 0$, en mettant pour du ſa valeur $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cauſe du cercle; & partant $AH\,(x) = \frac{1}{2}a$. * *Art.* 110. 111.

COROLLAIRE.

124. L'ESPACE AFM ou $AFKFM$ renfermé par les portions de courbes AF ou $AFKF$, AM, & par le rayon réfléchi MF, eſt égal à la moitié de l'eſpace circulaire APN. Car ſa différence, qui eſt le ſecteur FMO, eſt égale à la moitié du rectangle $PpSN$, différence de l'eſpace APN; puiſque les triangles rectangles MOm, MRm étant égaux & ſemblables, MO ſera égale à MR ou NS ou Pp, & que de plus $MF = PN$.

EXEMPLE VI.

FIG. 106. 125. SOIT la courbe AMD une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de ſon égal AGK, dont l'origine eſt en A, & le ſommet en D; ſoient les rayons incidens AM qui partent tous du point A. La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, paſſe continuellement par le point touchant G, & les arcs GM, GA comme auſſi leurs cordes, ſont toujours égaux; ainſi l'angle $HGM = BGA$, & l'angle $GMA = GAM$. Or l'angle $HGM + BGA = GMA + GAM$; puiſqu'ajoûtant de part & d'autre le même angle AGM, on en forme deux droits. Donc l'angle HGM ſera toujours égal à l'angle GMA; & partant auſſi à l'angle de réfléxion GMF: d'où il ſuit que MF paſſe toujours par le centre H du cercle mobile.

Maintenant ſi l'on mene les perpendiculaires CE, GO ſur le rayon incident AM: il eſt clair que $MO = OA$, & que
* *Art.* 100. $OE = \frac{1}{3}OM$; puiſque * le point C étant à la dévelopée, $GC = \frac{1}{3}GM$. On aura donc $ME = \frac{2}{3}AM$, c'eſt à dire $a = \frac{2}{3}y$; & par conſéquent $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{2}y$: d'où l'on voit que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur MF, le point F ſera à la cauſtique AFK.

Le cercle qui a pour diamétre GH, paſſe par le point F; & les arcs GM, $\frac{1}{2}GF$, meſures du même angle GHM, étant

entr'eux comme les diamétres MN, GH de leurs cercles, l'arc GF ſera égal à l'arc GM, & par conſéquent à l'arc GA. D'où il eſt évident que la cauſtique AFK eſt une roulette décrite par la revolution du cercle mobile HFG autour de l'immobile AGK.

COROLLAIRE.

126. SI l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point B, & pour rayon une droite égale à BH ou AK; & qu'il y ait une infinité de droites paralleles à BD qui tombent ſur ſa circonférence: il eſt viſible * qu'elles formeront en ſe réfléchiſſant la même cauſtique AFK. * *Art.* 120.

EXEMPLE VII.

127. SOIT la courbe AMD une logarithmique ſpirale, avec les rayons incidens AM qui partent tous du centre A. FIG. 107.

Si l'on mene par l'extrémité C du rayon de la développée la droite CA perpendiculaire ſur le rayon incident AM, elle le rencontrera * dans le centre A. C'eſt * *Art.* 91.

pourquoi $AM(y) = a$; & partant $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = y$. Le triangle AMF ſera donc iſoſcele; & comme les angles d'incidence & de réfléxion AMT, FMS ſont égaux entreux, il s'enſuit que l'angle AFM eſt égal à l'angle AMT. D'où il eſt clair que la cauſtique AFK ſera une logarithmique ſpirale qui ne differera de la propoſée AMD que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

Problême.

128. LA *cauſtique* HF *par réfléxion étant donnée avec le point lumineux* B; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfléxion.* FIG. 108.

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM;

on décrira du centre B, de l'intervale BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervale quelconque BM, un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM, on dévelopera la cauſtique HF en commençant au point E; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon BM, en un point M qui ſera * à la courbe AM. Car par conſtruction $PM + MF = AH + HF$.

*Art. 110.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ſes extrémitez en B & en F, on fera tendre ce fil par le moyen d'un ſtile placé en M, que l'on fera mouvoir en ſorte que l'on envelopera par la partie MF de ce fil la cauſtique HF; il eſt clair que ce ſtile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.

AUTRE SOLUTION.

129. AYANT tiré à diſcrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera ſur elle un point M, tel que $BM + MF = BA + AH + HF$. Ce qui ſe fera en cette ſorte.

Soit priſe $FK = BA + AH + HF$, & diviſant BK par le milieu en G, ſoit tirée la perpendiculaire GM: elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car $BM = MK$.

FIG. 109. Si le point B étoit infiniment eloigné de la courbe AM, c'eſt à dire que les rayons incidens BA, BM fuſſent paralleles à une ligne droite donnée de poſition; la premiére conſtruction auroit toujours lieu, en conſidérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires ſur les rayons incidens. Mais cette derniere deviendroit inutile; c'eſt pourquoi il faudroit lui ſubſtituer celle qui ſuit.

Soit priſe $FK = AH + HF$. Ayant trouvé le point M tel que MP parallele à AB perpendiculaire ſur AP, ſoit égale à MK: il eſt clair * que ce point ſera à la courbe cherchée AM; puiſque $PM + MF = AH + HF$. Or cela ſe fait ainſi.

* Art. 110.

Soit menée KG perpendiculaire ſur AP; & ayant pris $KO = KG$, ſoient tirées KP parallele à OG, & PN parallele à GK: je dis que le point M ſera celui qu'on cherche.

Car à cauſe des triangles ſemblables GKO, PMK, l'on aura $PM = MK$; puiſque $GK = KO$.

Si la cauſtique HF ſe réuniſſoit en un point, la courbe AM deviendroit une ſection conique.

COROLLAIRE I.

130. IL eſt clair que la courbe qui paſſe par tous les points K, eſt formée par le dévelopement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à meſure que le point A change de place ſur la tangente AH. Donc puiſque les courbes AM naiſſent toutes de ces courbes par la même conſtruction, qui eſt géométrique; il s'enſuit* qu'elles ſont d'une nature différente entr'elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF eſt géométrique & réctifiable.

* *Art.* 108.

COROLLAIRE II.

131. UNE ligne courbe DN étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, en ſorte que les rayons réfléchis DA, NM ſe réuniſſent en un point donné B, après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM. FIG. 110.

Si l'on imagine que la courbe HF ſoit la cauſtique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il eſt clair que cette ligne HF doit être auſſi la cauſtique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B; de ſorte que $FK = BA + AH + HF$, & $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC - CN$, puiſque* $HD + DC = HF + FN + NC$. Ce qui donne cette conſtruction.

* *Art.* 110.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra ſur un autre rayon réfléchi NM tel qu'on voudra, la partie $NK = BA + AD + DC - CN$; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-deſſus, art. 129.

SECTION VII.

Uſage du Calcul des differences pour trouver les Cauſtiques par réfraction.

DE'FINITION.

Fig. 111. SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons *BA*, *BM*, *BD*, qui partent d'un même point lumineux *B*, ſe rompent à la rencontre d'une ligne courbe *AMD*, en s'approchant ou s'éloignant de ſes perpendiculaires *MC*, en ſorte que les ſinus *CE* des angles d'incidence *CME*, ſoient toujours aux ſinus *CG* des angles de réfraction *CMG*, en même rai-
Fig. 112. ſon donnée de *m* à *n*; la ligne courbe *HFN* que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens *AH*, *MF*, *DN*, eſt appellée *Cauſtique par réfraction.*

COROLLAIRE.

132. SI l'on envelope la cauſtique *HFN* en commençant au point *A*, l'on décrira la courbe *ALK* telle que la tangente *LF* plus la portion *FH* de la cauſtique ſera continuellement égale à la même droite *AH*. Et ſi l'on conçoit une autre tangente *Fml* infiniment proche de *FML*, avec un autre rayon d'incidence *Bm*, & qu'on décrive des centres *F*, *B*, les petits arcs *MO*, *MR*: on formera deux petits triangles réctangles *MRm*, *MOm* qui ſeront ſemblables aux deux autres *MEC*, *MGC*, chacun à chacun; puiſque ſi l'on ôte des angles droits *RME*, *CMm* le même angle *EMm*, les angles reſtans *RMm*, *EMC* ſeront égaux; & de même ſi l'on ôte des angles droits *GMO*, *CMm* le même angle *GMm*, les reſtans *OMm*, *GMC* ſeront égaux. C'eſt pourquoi *Rm*. *Om*:: *CE*. *CG*:: *m*. *n*. Or puiſque *Rm* eſt
*Art. 96. la différence de *BM*, & *Om* celle de *LM*; il s'enſuit* que *BM* — *BA* ſomme de toutes les différences *Rm* dans la portion de courbe *AM*, eſt à *ML* ou *AH* — *MF* — *FH* ſomme de toutes les différences *Om* dans la même portion.

tion AM, comme m eſt à n; & partant que la portion $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM$.

Il peut arriver différens cas, ſelon que le rayon incident BA eſt plus grand ou moindre que BM, & que le rompu AH envelope ou dévelope la portion HF: mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens eſt à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la cauſtique qu'il dévelope avant que de tomber ſur l'autre) comme m eſt à n. Par exemple, $BA - BM . AH - MF - FH$ FIG. 112. $:: m . n$. d'où l'on tire $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$.

Si l'on décrit du centre B l'arc du cercle AP; il eſt clair FIG. 111. que PM ſera la différence des rayons incidens BM, BA. Et ſi l'on ſuppoſe que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD, les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire ſur ces rayons.

PROPOSITION I.

Problême général.

133. LA *nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, FIG. 111. *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver ſur le rayon rompu* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique par réfraction.*

Ayant trouvé * la longueur MC du rayon de la dévelopée au point donné M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F, les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg ſur les rayons incidens & rompus; & l'on nommera les données BM, y; ME, a; MG, b; & le petit arc MR, dx. Cela poſé, * *Sect.* 5.

Les triangles rectangles ſemblables MEC & MRm, MGC & MOm, BMR & BQe, donneront $ME\ (a) . MG\ (b) :: MR\ (dx) . MO = \frac{bdx}{a}$. Et $BM\ (y) . BQ$ ou BE

$(y+a) :: MR\,(dx) . Qe = \frac{adx+ydx}{y}$. Or par la propriété de la refraction $Ce . Cg :: CE . CG :: m . n$. Et par tant $m . n :: Ce - CE$ ou $Qe\left(\frac{adx+ydx}{y}\right) . Cg - CG$ ou $Sg = \frac{andx+nydx}{my}$. Donc à cauſe des triangles rectangles ſemblables FMO & FSg, l'on aura $MO - Sg\left(\frac{bm\,dx - an\,dx - aandx}{amy}\right) . MO\left(\frac{bdx}{a}\right) :: MS$ ou $MG\,(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette conſtruction.

FIG. 113. Soit fait vers CM l'angle $ECH = GCM$, & ſoit priſe vers B, $MK = \frac{aa}{y}$. Je dis que ſi l'on fait $HK . HE :: MG . MF$. le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car à cauſe des triangles ſemblables CGM, CEH, l'on aura $CG . CE :: n . m :: MG\,(b) . EH = \frac{bm}{n}$. D'où l'on tire $HE - ME$ ou $HM = \frac{bm-an}{n}$, $HM - MK$ ou $HK = \frac{bmy-any-aan}{ny}$; & partant $HK\left(\frac{bmy-any-aan}{ny}\right) . HE\left(\frac{bm}{n}\right) :: MG\,(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy-any-aan}$.

Il eſt clair que ſi la valeur de HK eſt négative, celle de MF le ſera auſſi : d'où il ſuit que le point M tombe entre les points G, F, lorſque le point H ſe trouve entre les points K, E.

FIG. 111. 113. Si le point lumineux B tomboit du côté du point E, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit concave du côté du point lumineux B ; y deviendroit négative de poſitive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conſequent $MF = \frac{-bbmy}{-bmy+any-aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy-any+aan}$. Et la conſtruction demeureroit la même.

Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie : c'eſt à dire que le point lumineux B ſoit infiniment éloigné de la courbe AMD ; les rayons incidens ſeront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{bbm}{bm-an}$, parceque le terme aan ſera nul

par rapport aux deux autres bmy, any ; & comme $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire $HM.HE::MG.MF$.

COROLLAIRE I.

134. ON démontrera, de même que dans les cauſtiques par réfléxion *, qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une ſeule cauſtique par réfraction, la raiſon de m à n étant donnée; laquelle cauſtique eſt toujours géométrique & réctifiable, lorſque la courbe propoſée AMD eſt géométrique.

* *Art.* 114. 115.

COROLLAIRE II.

135. SI le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE ſoit égale à CG ; il eſt clair que la cauſtique par réfraction ſe changera en cauſtique par réfléxion. En effet on aura $MF\left(\frac{bbmy}{bmy-any+aan}\right)=\frac{ay}{2y+a}$; puiſque $m=n$, & que a devient négative de poſitive qu'elle étoit, & de plus égale à b. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la ſection précédente.

Si m eſt infinie par rapport à n ; il eſt clair que le rayon rompu MF tombera ſur la perpendiculaire CM: de ſorte que la cauſtique par réfraction deviendra la dévelopée. En effet on aura $MF=b$, qui devient en ce cas MC: c'eſt-à-dire que le point F tombera ſur le point C, qui eſt à la dévelopée.

COROLLAIRE III.

136. SI la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que la valeur de $MF\left(\frac{bbmy}{bmy-any-aan}\right)$ ſoit poſitive ; il eſt clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G, par rapport au point M, comme on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul : & qu'au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Il en eſt de même lorſque la courbe AMD eſt concave vers le point B ; mais il faut obſerver qu'on aura pour lors

$MF = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. D'où il ſuit que les rayons rompus infiniment proches ſont convergens lorſque la valeur de MF eſt poſitive dans le premier cas, & négative dans le ſecond: & qu'au contraire ils ſont divergens lorſqu'elle eſt négative dans le premier cas, & poſitive dans le ſecond. Cela poſé; il eſt evident,

1°. Que ſi la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que m ſoit moindre que n; ou que ſi elle eſt concave vers ce point, & que m ſurpaſſe n: les rayons rompus infiniment proches ſeront toujours divergens.

2°. Que ſi la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que m ſurpaſſe n; ou que ſi elle eſt concave vers ce point, & que m ſoit moindre que n: les rayons rompus infiniment proches ſeront convergens, lorſque $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ eſt moindre que $MH\left(\frac{bm}{n} - a \text{ ou } a - \frac{bm}{n}\right)$; divergens, lorſqu'elle eſt plus grande; & paralleles, lorſqu'elle eſt égale. Or comme $MK = o$, lorſque les rayons incidens ſont paralleles, il s'enſuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches ſeront toujours convergens.

COROLLAIRE IV.

137. SI le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura $ME(a) = o$; & partant $MF = b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors ſur le point G.

Si le rayon incident BM eſt perpendiculaire à la courbe AMD, les droites $ME(a)$ & $MG(b)$ deviendront egales chacune au rayon CM de la dévelopée; puiſqu'elles ſe confondent avec lui. On aura donc $MF = \frac{bmy}{my - ny + bn}$, qui devient $\frac{bm}{m-n}$ lorſque les rayons incidens ſont paralleles entr'eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M, l'on aura $MG(b) = o$. D'où l'on voit que la cauſtique touche alors la courbe donnée au point M.

Si le rayon CM de la développée eſt nul ; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ ſeront auſſi egales à zero ; & par conſequent les termes aan, $bbmy$ ſont nuls par rapport aux autres bmy, any. D'où il ſuit que $MF = o$; & qu'ainſi la cauſtique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la développée eſt infini ; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ ſeront auſſi infinies ; & par-conſéquent les termes bmy, any ſeront nuls par rapport aux autres aan, $bbmy$: de ſorte qu'on aura $MF = \frac{bbmy}{+aan}$. Or * comme cette quantité eſt négative lorſque l'on ſuppoſe que le point F tombe de l'autre côté du point B par rapport à la ligne AMD, & qu'au contraire elle eſt poſitive lorſqu'on ſuppoſe qu'il tombe du même côté ; il s'enſuit * que l'on doit prendre le point F du même côté du point B, c'eſt-à-dire que les rayons rompus infiniment proches ſont divergens. Il eſt evident que le petit arc Mm devient alors une ligne droite, & que la conſtruction précédente n'a plus de lieu. On peut lui ſubſtituer celle-ci, qui ſervira à déterminer les points des cauſtiques par réfraction lorſque la ligne AMD eſt droite.

* *Art.* 133.

* *Art.* 136.

Ayant mené BO perpendiculaire ſur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire ſur AD ; on tirera OL perpendiculaire ſur le rayon rompu MG, & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera $BM \cdot BH :: ML \cdot MF$. Je dis que le point F ſera à la cauſtique par réfraction. FIG. 114.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO ſeront toujours ſemblables de quelque grandeur que l'on ſuppoſe CM ; & partant lorſqu'elle devient infinie, l'on aura encore $ME(a) \cdot MG(b) :: BM(y) \cdot ML = \frac{by}{a}$. Et à cauſe des triangles ſemblables OLM, OBH, l'on aura auſſi $OL \cdot OB(n \cdot m) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) \cdot BH = \frac{bmy}{an}$. D'où lon voit que $BM(y) \cdot BH\left(\frac{bmy}{an}\right) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) \cdot MF\left(\frac{bbmy}{aan}\right)$.

COROLLAIRE V.

138. IL eſt clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troiſiéme.

EXEMPLE I.

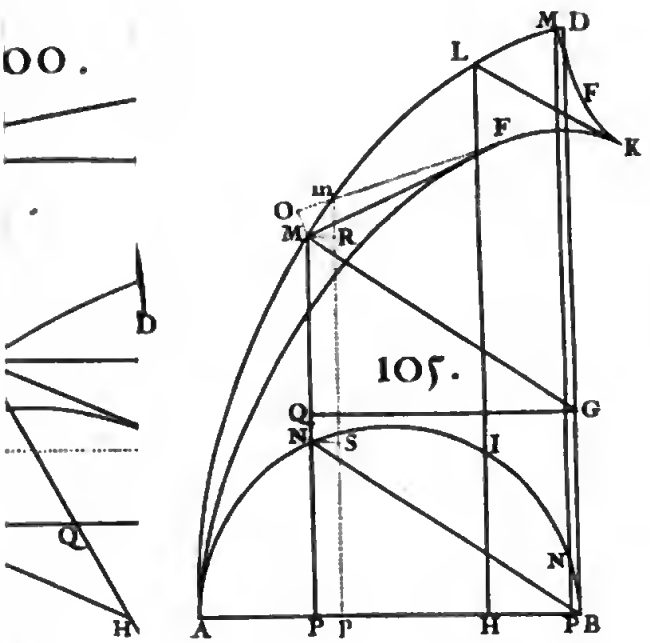
Fig. 115. 139. SOIT la courbe AMD un quart de cercle qui ait pour centre le point C; ſoient les rayons incidens BA, BM, BD paralleles entr'eux, & perpendiculaires ſur CD; ſoit enfin la raiſon de m à n, comme 3 à 2, qui eſt celle que ſouffrent les rayons de lumiere en paſſant de l'air dans le verre. Puiſque la dévelopée du cercle AMD ſe réünit en un point C qui en eſt le centre, il s'enſuit que ſi l'on décrit une demi-circonference MEC qui ait pour diamétre le rayon CM, & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3}CE$; la ligne MG ſera le rayon rompu, ſur lequel on déterminera le point F, comme l'on a enſeigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire ſur AMD touche la cauſtique par réfra-
*Art. 137. ction, l'on aura * $AH\left(\frac{bm}{m-n}\right) = 3b = 3CA$. Et ſi l'on décrit une demi-circonférence CND qui ait pour diamétre le rayon CD, & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3}CD$; il eſt
*Art. 137. clair * que le point N ſera à la cauſtique par réfraction, puiſque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D.

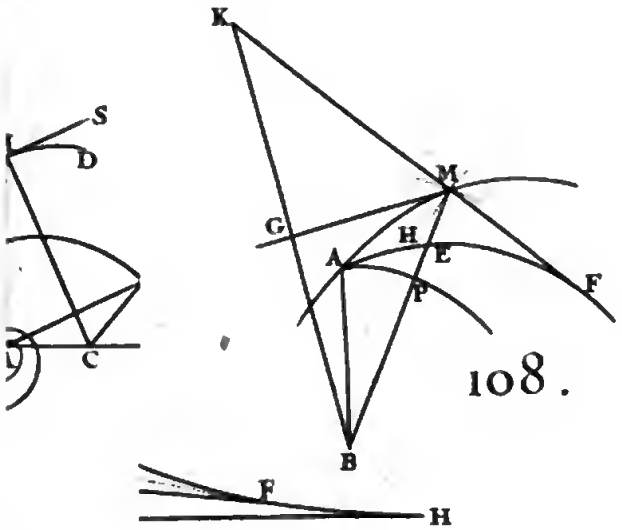
*Art. 132. Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt viſible * que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$: de ſorte que la cauſtique entiere $HFN = \frac{7}{3}CA - DN = \frac{7-\sqrt{3}}{3}CA$.

Fig. 116. Si le quart de cercle AMD eſt concave vers les rayons incidens BM, & que la raiſon de m à n ſoit de 2 à 3; on prendra ſur la demi-circonférence CEM qui a pour diametre le rayon CM, la corde $CG = \frac{2}{3}CE$, & on tirera le rayon rompu MG ſur lequel on déterminera le point F par la conſtruction générale art. 133.

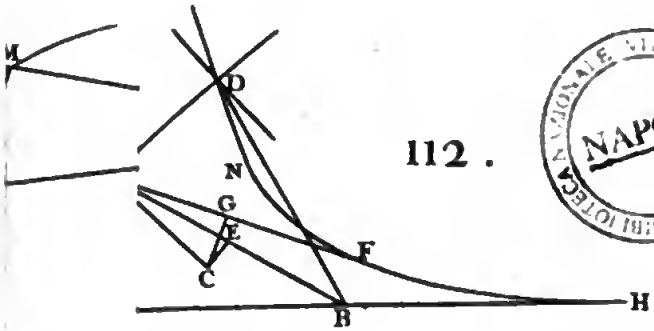
00.



105.



108.



112.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

On aura* $AH\left(\frac{bm}{m-n}\right)=-2b$, c'eſt à dire que AH ſera du côté * de la convexité du quart de cercle AMD, & double du rayon AC. Et ſi l'on ſuppoſe que CG ou $\frac{1}{2}CE$ ſoit égale à CM; il eſt manifeſte que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M, puiſqu'alors le point G ſe confondra avec le point M. D'où il ſuit que ſi l'on prend $CE=\frac{2}{3}CD$, le point M tombera au point N où la cauſtique HFN* touche le quart de cercle AMD. Mais lorſque CE ſurpaſſe $\frac{2}{3}CD$, les rayons incidens BM ne pourront plus ſe rompre, c'eſt à dire paſſer du verre dans l'air; puiſqu'il eſt impoſſible que CG perpendiculaire ſur le rayon rompu MG, ſoit plus grande que CM: de ſorte que tous les rayons qui tomberont ſur la partie ND ſe réfléchiront.

* *Art.* 137.

* *Art.* 136.

* *Art.* 137.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt clair * que la portion $FH=AH-MF+\frac{3}{2}PM$: de ſorte que menant NK parallele à CD, la cauſtique entiere $HFN=2CA+\frac{3}{2}AK=\frac{7-\sqrt{5}}{2}CA$.

* *Art.* 132.

EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe AMD une logarithmique ſpirale qui ait pour centre le point A, duquel partent tous les rayons incidens AM.

FIG. 117.

Il eſt clair * que le point E tombe ſur le point A, c'eſt à dire que $a=y$. Si donc l'on met à la place de a ſa valeur y dans $\frac{bbmv}{bmy-any+aan}$ valeur* de MF lorſque la courbe eſt concave du coté du point lumineux; on aura $MF=b$; d'où l'on voit que le point F tombe ſur le point G.

* *Art.* 91.

* *Art.* 133.

Si l'on mene la droite AG, & la tangente MT; l'angle AGO complement à deux droits de l'angle AGM, ſera egal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diametre la ligne CM, paſſant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour meſure la moitié du même arc AM. Il eſt donc évident que la cauſtique AGN eſt la même lo-

garithmique ſpirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en différe que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 118. 141. LA *cauſtique* HF *par réfraction étant donnée avec ſon point lumineux* B, *& la raiſon de* m *à* n; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfraction.*

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervale BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervale quelconque BM un autre arc de cercle; & ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en enveloppant la cauſtique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervale BM, en un point M qui ſera à la courbe cherchée. Car *$PM . AE$ ou $ML :: m . n$.

*Art. 132.

AUTRE SOLUTION.

142. ON cherchera ſur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$. C'eſt pourquoi ſi l'on prend $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$, & qu'on trouve ſur FK un point M tel que $MK = \frac{n}{m} BM$, il ſera * celui qu'on cherche. Or cela ſe peut faire en décrivant une ligne courbe GM telle que menant d'un de ſes points quelconque M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles ayent toujours entr'elles un même rapport que m à n. Il n'eſt donc queſtion que de trouver la nature de ce lieu.

*Art. 132.

FIG. 119.

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire ſur BK, & nommée la donnée BK, a; & les indéterminées BR, x; RM, y. Les triangles rectangles BRM, KRM donneront $BM = \sqrt{xx + yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$: de

de ſorte que pour remplir la condition du Problême, l'on aura $\sqrt{xx+yy}.\sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m.n$. D'où l'on tire $yy=\frac{2amnx-aamm}{mm-nn}-xx$, qui eſt un lieu au cercle que l'on conſtruira ainſi.

Soit priſe $BG=\frac{am}{m+n}$, & $B\mathcal{Q}=\frac{am}{m-n}$, & ſoit décrit du diametre $G\mathcal{Q}$ la demi-circonférence $GM\mathcal{Q}$: je dis qu'elle ſera le lieu requis. Car ayant $\mathcal{Q}R$ ou $B\mathcal{Q}-BR=\frac{am}{m-n}-x$, & RG ou $BR-BG=x-\frac{am}{m+n}$; la propriété du cercle, qui donne $\mathcal{Q}R\times RG=\overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy=\frac{2amnx-aamm}{mm-nn}-xx$.

Si les rayons incidens BA, BM ſont paralleles à une droite donnée de poſition, la premiere ſolution aura toujours lieu; mais celle ci deviendra inutile, & on pourra lui ſubſtituer la ſuivante. FIG. 120.

Soit priſe $FL=AH-HF$; & ayant mené LG parallele à AB & perpendiculaire ſur AP, on prendra $LO=\frac{n}{m}LG$, & on tirera LP parallele à GO, & PM parallele à GL. Il eſt clair* que le point M ſera celui qu'on cherche; car puiſque $LO=\frac{n}{m}LG$, $ML=\frac{n}{m}PM$. **Art.* 132.

Si la cauſtique FH par réfraction, ſe réünit en un point; les courbes AM deviennent les Ovales de *Deſcartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Géometres.

COROLLAIRE I.

143. ON démontre de même que dans les cauſtiques par réflexion*, que les courbes AM ſont de nature différente entr'elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF par réfraction eſt géométrique & réctifiable. **Art.* 130.

COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe AM étant donnée avec le point lumineux B, & la raiſon de m à n; trouver une infi- FIG. 121.

nité de lignes telles que DN, en ſorte que les rayons rompus MN ſe rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour ſe réunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe HF ſoit la cauſtique par réfraction de la courbe donnée AM, formée par le point lumineux B; il eſt clair que cette même ligne HF doit être auſſi la cauſtique par réfraction de la courbe cherchée DN, ayant pour point lumineux le point donné C.

*Art. 132. C'eſt pourquoi * $\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MF+FH$, & $NF+FH-\frac{n}{m}NC=HD-\frac{n}{m}DC$; & partant $\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MN+HD-\frac{n}{m}DC+\frac{n}{m}NC$; & tranſpoſant à l'ordinaire, $\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD=MN+\frac{n}{m}NC$. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN, on prendra ſur un autre rayon rompu quelconque MF la partie $MK=\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD$;

*Art. 142. & ayant trouvé, comme ci-deſſus *, le point N tel que

*Art. 132. $NK=\frac{n}{m}NC$, il eſt clair * qu'il ſera à la courbe DN.

COROLLAIRE GE'NE'RAL.

Pour les trois Sections précédentes.

*Art. 80. 85. 107. 108. 114. 115. 128. 129. 134. 143. 145. IL eſt manifeſte * qu'une ligne courbe n'a qu'une ſeule dévelopée, qu'une ſeule cauſtique par réfléxion, & qu'une ſeule par réfraction, le point lumineux & le rapport des ſinus étant donnés, leſquelles lignes ſont toujours géométriques & réctifiables lorſque cette courbe eſt géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la dévelopée, & l'une & l'autre cauſtique dans le même rapport des ſinus, & dans la même poſition du point lumineux, commune à une infinité de lignes très différentes entr'elles, & qui ne ſont géométriques que lorſque cette courbe eſt géométrique & réctifiable.

SECTION VIII.

Uſage du calcul des differences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de poſition, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Problême.

146. SOIT *donnée une ligne quelconque* AMB, *qui ait pour axe la droite* AP; *ſoient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui paſſent toutes par le point* A, *& qui ayent pour axes les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.* FIG. 122.

Il eſt clair que le point touchant de chaque parabole *AMC* eſt le point d'interſection *C* où la parabole *AmC*, qui en eſt infiniment proche, la coupe. Cela poſé, & ayant mené *CK* parallele à *MP*, ſoient nommées les données *AP*, *x*; *PM*, *y*; & les inconnues *AK*, *u*; *KC*, *z*. On aura par la propriété de la parabole, $\overline{AP}^2 (xx) . \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) :: MP (y) . MP - CK (y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui eſt l'équation commune à toutes les paraboles telles que *AMC*. Or je remarque que les inconnues *AK (u)* & *KC (z)* demeurent les mêmes, pendant que les données *AP (x)* & *PM (y)* varient en devenant *Ap* & *pm*; & qu'il n'arrive que *KC (z)* demeure la même, que lorſque le point *C* eſt celui d'interſection: car il eſt viſible que par tout ailleurs la droite *KC* coupera les deux paraboles *AMC*, *AmC* en deux differens points, & qu'elle aura par conſéquent deux valeurs qui répondront à la même de *AK*. C'eſt pourquoi ſi l'on traite *u* & *z* comme conſtantes, en prenant la difference de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point *C* à être celui d'interſection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue

$AK\ (u) = \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{2uxy - uuy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée, on trouvera une valeur de dy en dx, laquelle étant ſubſtituée dans la valeur de AK, cette inconnue ſera enfin exprimée en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit propoſé.

Si au lieu des paraboles AMC, on propoſoit d'autres lignes droites ou courbes dont la poſition fût déterminée, on réſoudroit toujours le Problême à peu près de la même maniére: & c'eſt ce que l'on verra dans les Propoſitions ſuivantes.

EXEMPLE.

147. QUE l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB: elle ſera une demi-ellipſe qui aura pour petit axe, la droite $AB = a$ perpendiculaire ſur AP, & dont le grand axe ſera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant $AK\ \left(\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}\right) = \frac{ax}{y} = u$. D'où il ſuit que ſi l'on prend AK quatriéme proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mene KC perpendiculaire ſur AK; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui paſſe par tous les points C ainſi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la relation de $AK\ (u)$ à $KC\ (z)$ en cette ſorte. Mettant à la place de u ſa valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{aa}{2a - z}$; & partant x ou $\frac{ay}{a} = \frac{au}{2a - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne ſe rencontrent plus, & qui exprime la relation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée eſt une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour ſommet le point B, pour foyer le point A, & dont le parametre par conſequent eſt quadruple de AB.

On vient de trouver $y = \frac{aa}{2a - z}$, d'où l'on tire $KC\ (z) = \frac{2ay - aa}{y}$. Or comme cette valeur eſt poſitive lorſque $2y$ ſurpaſſe a, négative lorſqu'il eſt moindre, & nulle lorſqu'il lui eſt égal: il s'enſuit que le point touchant C tombe au deſſus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit ſuppoſe en faiſant le calcul; au deſſous dans le ſecond, & enfin ſur AP dans le troiſiéme.

Si l'on mene la droite AC qui coupe MP en G; je dis que $MG = BQ$, & que le point G eſt le foyer de la parabole AMC. Car, 1°. $AK\ (\frac{ax}{y}).\ KC\ (\frac{2ay - aa}{y})\ ::\ AP\ (x).\ PG = 2y - a$. & partant $MG = a - y = BQ$. 2°. Le parametre de la parabole AMC, eſt $= 4a - 4y$ en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$; & partant $MG\ (a - y)$ eſt la quatriéme partie du parametre: d'où l'on voit que le point G eſt le foyer de la parabole; & qu'ainſi l'angle BAC doit être diviſé en deux également par la tangente en A.

Il ſuit de ce que le parametre de la parabole AMC eſt quadruple de BQ, que le ſommet M tombant en A, le parametre ſera quadruple de AB, & qu'ainſi la parabole, qui a pour ſommet le point A, eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C.

Comme la parabole BC touche toutes les paraboles telles que AMC; il eſt clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée AC en des points qui ſeront plus proches du point A que le point C. Or l'on démontre dans la Baliſtique (en ſuppoſant que AK ſoit horizontale) que toutes les paraboles telles que AMC marquent le chemin que décrivent en l'air des Bombes qui ſeroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations poſſibles avec la même force. D'où il ſuit que ſi l'on mene une droite qui diviſe par le milieu l'angle BAC; elle marquera la poſition que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe ſur le plan AC donné de poſition, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élevation.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 123. 148. SOIT *donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; *trouver une autre courbe* BC *telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée* PM, *& la perpendiculaire* PC *à cette courbe, ces deux lignes* PM, PC *soient toujours égales entr'elles.*

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pm; il eſt clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle eſt le point d'interſection où le cercle qui en eſt infiniment proche, le coupe. Cela poſé, ſoit mené CK perpendiculaire ſur AP; ſoient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y, les inconnues & conſtantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui eſt l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence eſt $2ydy = 2xdx - 2udx$: d'où l'on tire PK ($x - u = \frac{ydy}{dx}$; ce qui donne cette conſtruction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM; & ayant pris $PK = PQ$, ſoit tirée KC parallele à PM: je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon $PC = PM$ au point C, où il touche la courbe cherchée BC. Ce qui eſt évident; puiſque $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre maniére.

Ayant mené PO perpendiculaire ſur Cp, les triangles réctangles pOP, PKC ſeront ſemblables; & partant $Pp\ (dx).\ Op\ (dy) :: PC\ (y).\ PK = \frac{ydy}{dx}$.

Lorſque $PQ = PM$, il eſt clair que le cercle décrit du rayon PC, touchera KC au point K: de ſorte que le point

touchant *C* ſe confondra avec le point *K*, & tombera par conſequent ſur l'axe.

Mais lorſque *PQ* ſurpaſſera *PM*, le cercle décrit du rayon *PC* ne pourra toucher la courbe *BC*; puiſqu'il ne pourra rencontrer la droite *KC* en aucun point.

EXEMPLE.

149. SOIT la courbe donnée *AM*, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura *PQ* ou $PK(x-u) = \frac{1}{2}a$; & par conſéquent $x = \frac{1}{2}a + u$, & $yy = \frac{1}{4}aa + zz$ à cauſe du triangle rectangle *PKC*. Or ſi l'on met ces valeurs dans $ax = yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + zz$ ou $\frac{1}{4}aa + au = zz$, qui exprime la nature de la courbe *BC*. D'où il eſt clair que cette courbe eſt la même parabole que *AM*; puiſqu'elles ont l'une & l'autre le même parametre *a*, & que ſon ſommet *B* eſt éloigné du ſommet *A* de la diſtance $BA = \frac{1}{4}a$. FIG. 123.

PROPOSITION III.

Problême.

150. SOIT *donnée une ligne courbe quelconque* AM, *qui ait pour diametre la droite* AP, *& dont les appliquées* PM, pm *ſoient paralleles à la droite* AQ *donnée de poſition; & ayant mené* MQ, mq *paralleles à* AP, *ſoient tirées les droites* PQC, pqC. *On demande la courbe* AC *qui a pour tangentes toutes ces droites : ou, ce qui eſt la même choſe, il s'agit de déterminer ſur chaque droite* PQC *le point touchant* C. FIG. 124.

Ayant imaginé une autre tangente *pqC* infiniment proche de *PQC*, & mené *CK* parallele à *AQ*, on nommera les données & variables *AP*, *x*; *PM* ou *AQ*, *y*; les inconnues & conſtantes *AK*, *u*; *KC*, *z*; & les triangles ſemblables *PAQ*, *PKC* donneront $AP(x).AQ(y) :: PK(x+u).KC(z) = y + \frac{uy}{x}$. qui eſt l'équation

commune à toutes les droites telles que KC. Sa différence eſt $dy + \frac{uxdy - uydx}{xx} = o$, d'où l'on tire $AK\,(u) = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette conſtruction générale.

Soit menée la tangente MT, & ſoit priſe AK troiſiéme proportionnelle à AT, AP : je dis que ſi l'on mene KC parallele à AQ, elle ira couper la droite PQC au point cherché C.

Car $AT\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right).\ AP\,(x) :: AP\,(x).\ AK = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$.

EXEMPLE I.

FIG. 124. 151. SOIT la courbe donnée AM, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura $AT = AP$; d'où il ſuit que $AK\,(u) = x$, c'eſt à dire que le point K tombe ſur le point T. Si l'on veut à préſent avoir une équation qui exprime la relation de $AK\,(u)$ à $KC\,(z)$; on trouvera $KC\,(z) = zy$, puiſque l'on vient de trouver que PK eſt double de AP. Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe AC eſt une parabole qui a pour ſommet le point A, & pour parametre une ligne quadruple du parametre de la parabole AM.

EXEMPLE II.

FIG. 125. 152. SOIT la courbe donnée AM, un quart de cercle BMD qui ait pour centre le point A, & pour rayon la ligne AB ou AD, que j'appelle a. Il eſt clair que PQ eſt toujours égale au rayon AM ou AB, c'eſt à dire qu'elle eſt par-tout la même : de ſorte que l'on peut concevoir que ſes extrémités P, Q gliſſent le long des côtés BA, AD de l'angle droit BAD. On aura $AK\,(u) = \frac{x^3}{aa}$, puiſque $AT = \frac{aa}{x}$; & les paralleles KC, AQ donneront $AP\,(x).\ PQ\,(a) :: AK\left(\frac{x^3}{aa}\right).\ QC = \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troiſiéme propor-

proportionnelle à PQ & AP. Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci, $u^6 - 3aau^4 + 3a^4uu - a^6 = 0$.
$+ 3zz + 21aazz + 3a^4zz$
$+ 3z^4 - 3aaz^4$
$+ z^6$

COROLLAIRE I.

153. Si l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à sa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP; & ayant décrit du centre C le petit arc PO, l'on aura $cp - CP$ ou $Op - Cc = -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de $CP = \frac{aa - xx}{a}$: d'où l'on tire $Cc = Op + \frac{2xdx}{a}$. Or à cause des triangles rectangles semblables QPA, PpO, l'on aura $PQ\,(a).\ AP\,(x) :: Pp\,(dx).\ Op = \frac{xdx}{a}$. & partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il est donc manifeste qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours $DC - Dc\ \left(\frac{3xdx}{a}\right).\ CP - cp\ \left(\frac{2xdx}{a}\right) :: 3.2$. D'où il suit que la somme de toutes les différences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD, c'est à dire * la portion DC de la courbe BCD, est à la somme de toutes les differences $CP - cp$ qui répondent à la même droite PD, c'est à dire * à la tangente $CP :: 3.2$. Et de même que la courbe entiére BCD est à sa tangente $BA :: 3.2$. * *Art. 96.* * *Art. 96.*

COROLLAIRE II.

154. Si l'on dévelope la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que $CN.CP :: 3.2$. puisque CN est toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il suit que les secteurs semblables CNn, CPO sont entr'eux $:: 9.4$. & partant que l'espace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui est tangente en C, & perpendiculaire en

N, eſt à l'eſpace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9. à 4.

COROLLAIRE III.

155. LE centre de peſanteur du ſécteur CNn doit être ſitué ſur l'arc PO; puiſque $CP = \frac{3}{4}CN$. Et comme cet arc eſt infiniment petit, il s'enſuit que ce centre doit être ſur la droite AD; & partant que le centre de peſanteur des eſpaces DCN, BDF, qui ſont compoſés de tous ces ſécteurs, doit être ſur cette droite AD: de ſorte que ſi l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de peſanteur de la figure entiére ſeroit au point A.

COROLLAIRE IV.

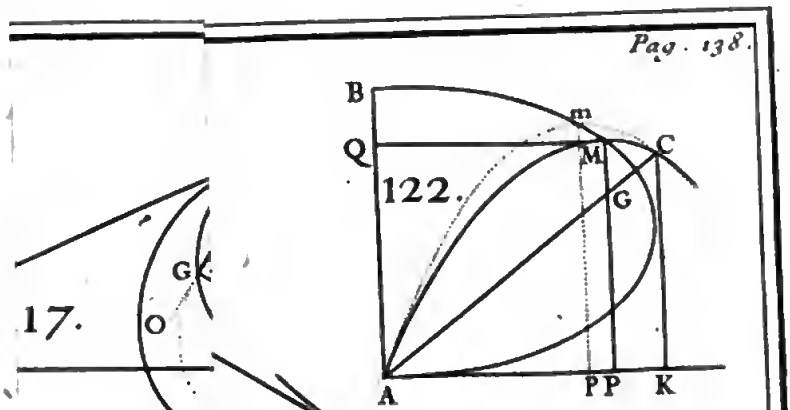
156. A cauſe des triangles réctangles ſemblables PQA, pPO, l'on aura $PQ\,(a).\ AQ$ ou $PM\,(\sqrt{aa-xx})::Pp\,(dx).\ PO = \frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$. Et à cauſe des ſécteurs ſemblables CPO, CNn, l'on aura auſſi $CP.CN$, ou $2.3::PO\left(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\right).Nn = \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}$. Or le réctangle $MP \times Pp$, c'eſt à dire * le petit eſpace circulaire $MPpm = dx\sqrt{aa-xx}$. On aura donc $AB \times Nn = \frac{3}{2}MPpm$: d'où il ſuit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, eſt ſeſquialtére du ſegment circulaire DMP, & que la courbe entiére DNF eſt égale aux trois quarts de BMD quatriéme partie de la circonférence du cercle.

* *Art.* 2.

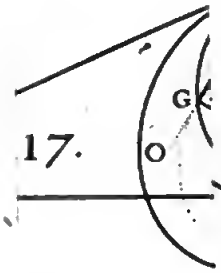
PROPOSITION IV.

Problême.

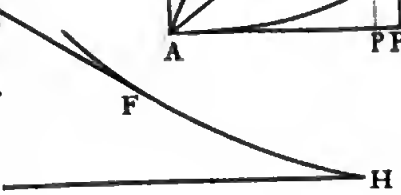
FIG. 126. 157. SOIT *donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; *& ſoient entendues une infinité de perpendiculaires* MC, mC *à cette courbe. On demande la courbe*

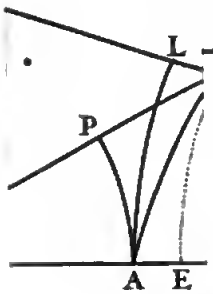


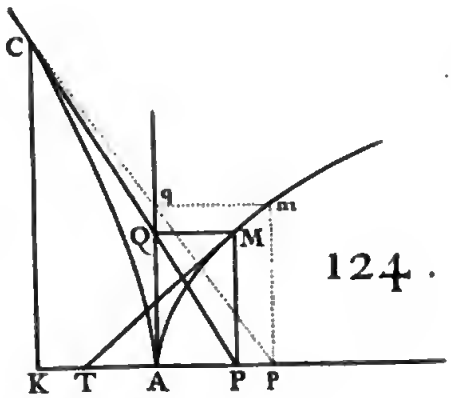
122.



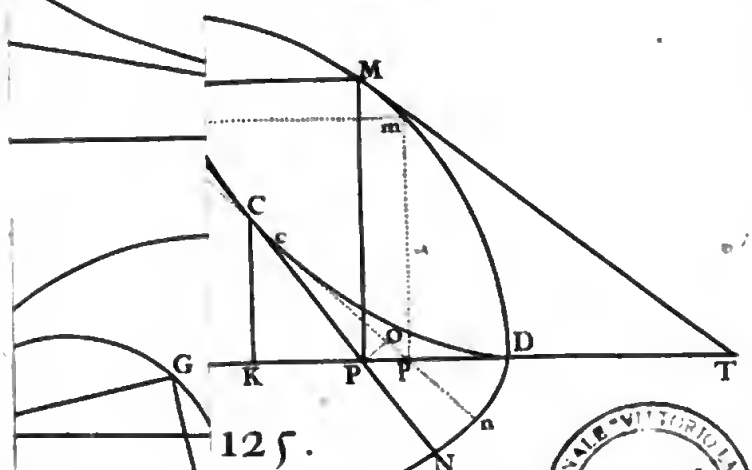
17.







124.



125.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui eſt la même choſe, il faut trouver ſur chaque perpendiculaire MC *le point touchant C.*

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mC* infiniment proche de *MC*, avec une appliquée *MP*, l'on menera par le point d'interſection *C* les droites *CK* perpendiculaire & *CE* parallele à l'axe : ayant enſuite nommé les données & variables *AP*, *x* ; *PM*, *y* ; les inconnues & conſtantes *AK*, *u* ; *KC*, *z* ; l'on aura $PQ = \frac{ydy}{dx}$, *PK* ou *CE* $= u - x$, $ME = y + z$; & les triangles rectangles ſemblables *MPQ*, *MEC* donneront $MP(y) . PQ(\frac{ydy}{dx}) :: ME(y+z) . EC(u-x) = \frac{ydy+xdy}{dx}$. qui eſt une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que *MC*, & dont la différence (en ſuppoſant *dx* conſtante) donne $-dx = \frac{yddy+dy^2+xddy}{dx}$: d'où l'on tire $ME(z+y) = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe *AM* étant donnée, l'on aura des valeurs de dy^2 & *ddy* en dx^2, leſquelles étant ſubſtituées dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, donneront pour *ME* une valeur entiérement connue & délivrée des differences. Ce qui étoit propoſé.

Il eſt évident que la courbe qui paſſe par tous les points *C*, eſt la dévelopee de la courbe *AM* ; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquieme, il ſeroit inutile d'en donner ici des éxemples nouveaux.

PROPOSITION V.

Problême.

158. DEUX *lignes quelconques* AM, BN *étant données avec une ligne droite* MN *qui demeure toujours la même, on ſuppoſe que les extrémités* M, N *de cette ligne gliſſent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe quelle touche toujours dans ce mouvement.*

Ayant mené les tangentes *MT*, *NT*, & imaginé une [illegible]

S 3

tre droite mn infiniment proche de MN, & qui la coupe par conſéquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il eſt clair que la droite MN, pour parvenir en mn, a parcouru par ſes extrêmités les petites portions Mm, Nn des lignes AM, BN, leſquelles ſont communes à cauſe de leur infinie petiteſſe, aux tangentes TM, TN: de ſorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la ſituation infiniment proche mn, ait gliſſé le long des droites TM, TN données de poſition.

Cela bien entendu, ſoient menées ſur NT les perpendiculaires MP, CK; ſoient nommées les données & variables TP, x; PM, y; les inconnues & conſtantes TK, u; KC, z; & la donnée MN qui demeure par tout la même, a. Le triangle réctangle MPN donnera $PN = \sqrt{aa - yy}$; & à cauſe des triangles ſemblables NPM, NKC, l'on aura $NP\ (\sqrt{aa-yy}).\ PM\ (y) :: NK\ (u - x - \sqrt{aa-yy}).\ KC\ (z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa-yy}} - y$. dont la différence donne $aaudy - aaxdy - aaydx + y^3dx = aady - yydy\sqrt{aa-yy}$: d'où en faiſant $\sqrt{aa-yy} = m$ pour abréger, l'on tire $PK\ (u-x) = \frac{m^3dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3 + mmx}{aa}$ en mettant pour ydx ſa valeur xdy, à cauſe des triangles ſemblables mRM, MPT; & partant $MC = \frac{mm + mx}{a}$: ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée TE perpendiculaire ſur MN, & ſoit priſe $MC = NE$: je dis que le point C ſera celui qu'on cherche. Car à cauſe des triangles réctangles ſemblables MNP, TNE, l'on aura $MN\ (a).\ NP\ (m) :: NT\ (m+x).\ NE$ ou $MC = \frac{mm + mx}{a}$.

Autre maniére. Ayant mené TE perpendiculaire ſur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE, r; ET, s; MN, a; & l'inconnue CM, t. On aura Sm ou $On = dt$; & les triangles réctangles ſem-

blables MET & mSM, NET & nON, CMS & CNO donneront $ME(r-a).ET(s)::mS(dt).SM=\frac{sdt}{r-a}$. Et $NE(r).ET(s)::nO(dt).ON=\frac{sdt}{r}$. Et $MS-NO\left(\frac{asdt}{rr-ar}\right).MS\left(\frac{sdt}{r-a}\right)::MN(a).MC(t)=r$. Ce qui donne la même conſtruction que ci-deſſus.

Si l'on ſuppoſe que les lignes AM, BN ſoient des droites qui faſſent entr'elles un angle droit; il eſt viſible que la courbe cherchée eſt la même que celle de l'article 152.

PROPOSITION VI.

Problême.

159. SOIENT *données trois lignes quelconques* L, M, N; *& ſoient entendues de chacun des points* L, l *de la ligne* L *deux tangentes* LM & LN, lm & ln, *aux deux courbes* M & N, *une à chacune. On demande la quatriéme courbe* C, *qui ait pour tangentes toutes les droites* MN, mn *qui joignent les points touchans des courbes* M, N. FIG. 128.

Ayant tiré la tangente LE, & mené par un de ſes points quelconque E les perpendiculaires EF, EG ſur les deux autres tangentes ML, NL, on concevra que le point l ſoit infiniment près du point L; on tirera les petites droites LH, LK perpendiculaires ſur ml, nl; comme auſſi les perpendiculaires MP, mP, $N\mathcal{Q}$, $n\mathcal{Q}$ ſur les tangentes ML, ml, NL, nl, leſquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P & $\mathcal{Q}$. Tout cela formera les triangles rectangles ſemblables EFL & LHl, EGL & LKl; comme auſſi les triangles LMH & MPm, LnK & $N\mathcal{Q}n$ rectangles en H & m, K & N, qui ſeront ſemblables entr'eux, puiſque les angles LMH, MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle PMm, font un droit. On prouvera de même, que les angles LnK, $N\mathcal{Q}n$ ſont égaux entr'eux.

Cela poſé, on nommera le petit côté Mm du polygone qui compoſe la courbe M, du; & les données EF, m; EG, n; MN ou mn, a; ML ou ml, b; NL ou nl, c; MP ou

mP, f; NQ ou nQ, g (je prens ici les droites MP, NQ pour données, parceque la nature des courbes M, N étant donnée par la ſuppoſition, on les pourra toujours trouver *); & l'on aura, 1°, $MP(f).\ ML(b) :: Mm(du).\ LH = \frac{bdu}{f}$. 2°. $EF(m).\ EG(n) :: LH\left(\frac{bdu}{f}\right).\ LK = \frac{bndu}{mf}$. 3°. LN ou $Ln(c).\ nQ(g) :: LK\left(\frac{bndu}{mf}\right).\ nN = \frac{bgndu}{cfm}$. 4°. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml(b).\ ln(c) :: mM(du).\ MR = \frac{cdu}{b}$. 5°. $MR + Nn\left(\frac{cdu}{b} + \frac{bgndu}{cfm}\right).\ MR\left(\frac{cdu}{b}\right) :: MN(a).\ MC = \frac{accfm}{ccfm + bbgn}$. Ce qu'il falloit trouver.

*Art. 78.

Si la tangente EL tomboit ſur la tangente ML, il eſt clair que $EF(m)$ deviendroit nulle ou zero; & partant que le point cherché C tomberoit ſur le point M. De même ſi la tangente EL ſe confondoit avec la tangente LN; alors $EG(n)$ deviendroit nulle, & l'on auroit par conſéquent $MC = s$: d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit auſſi ſur le point N. Et enfin ſi la tangente EL tomboit dans l'angle GLI; en ce cas $EG(n)$ deviendroit négative: ce qui donneroit alors $MC = \frac{accfm}{ccfm - bbgn}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

Fig. 129. 160. SUPPOSONS que les courbes M & N ne faſſent qu'un cercle. Il eſt clair en ce cas que $b = c$, & $f = g$; ce qui donne $MC = \frac{am}{m+n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raiſon donnée de m à n pour avoir le point cherché C; c'eſt à dire en ſorte que $MC.\ NC :: m.n$.

EXEMPLE II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N ſoient une

Section conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une proprieté des Sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent: sçavoir que si l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM & LN, lm & ln à une Section conique, toutes les droites MN, mn qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C, par lequel passe le diametre AC, dont les ordonnées sont paralleles à la droite EL. Car il suit de là, que pour avoir le point C, il ne faut que mener un diametre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente EL.

Il est évident que dans le cercle, le diametre doit être perpendiculaire sur la tangente EL; c'est à dire qu'en menant de son centre A une perpendiculaire AB sur cette tangente, elle coupera la droite MN au point cherché C.

REMARQUE.

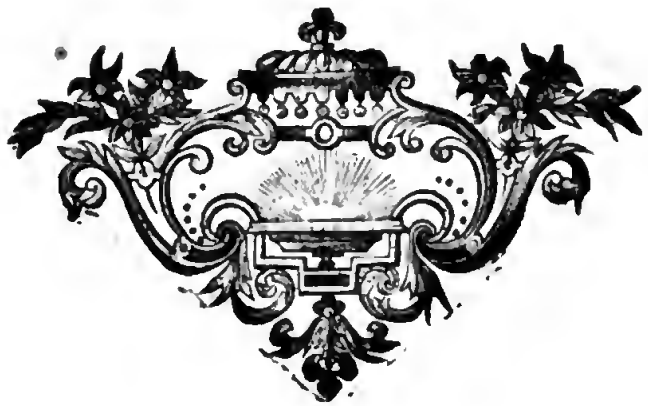
162. ON peut par le moyen de ce Problême résoudre celui ci qui dépend de la Methode des Tangentes. FIG. 128.

Les trois courbes C, M, N, étant données, on fera rouler une ligne droite MN autour de la courbe C, en sorte qu'elle la touche continuellement; on tirera par les points M, N, où elle coupe les courbes M & N, les tangentes ML, NL qui s'entrecoupent en un point L, lequel décrit dans ce mouvement une quatriéme courbe Ll. Il s'agit de tirer la tangente LE de cette courbe, la position des droites MN, ML, NL étant donnée avec le point touchant C.

Car il est visible que ce Problême n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici MC est donnée: ce qu'on cherche, c'est la raison de EF, EG, qui détermine la position de la tangente EL. C'est pourquoi si l'on nomme la donnée MC, h; l'on aura $\frac{accfm}{ccfm+bbgn} = h$: d'où l'on tire $m = \frac{bbghn}{accf-ccfh}$; & par conséquent la tangente LE doit être tellement située dans l'angle donné MLG, que si l'on mene d'un de

ſes points quelconque E les perpendiculaires EF, EG ſur les côtés de cet angle, elles ſoient toujours entr'elles en raiſon donnée de $bbgh$ à $accf - ccfh$ Or cela ſe fait en menant MD parallele à NL, & égale à $\frac{b^2gh}{accf - ccfh}$.

FIG. 129. Il eſt évident * que ſi les deux courbes M & N ne ſont
* *Art.* 161. qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente LE parallele aux ordonnées du diametre qui paſſe par le point C.



SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précedentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorſque* x = a, *c'eſt à dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. FIG. [illegible].

Soient entendues deux lignes courbes *ANB*, *COB*, qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui ſoient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les *PM*: de ſorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il eſt clair que ces deux courbes ſe rencontreront au point *B*; puiſque par la ſuppoſition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorſque le point *P* tombe en *B*. Cela poſé, ſi l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB*, *COB* aux points *f*, *g*; lon aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne différe pas de *BD*. Il n'eſt donc queſtion que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il eſt viſible que la coupée *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN*, *PO* deviennent nulles, & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il ſuit que ces appliquées, elles-mêmes *bf*, *bg*, ſont la difference des appliquées en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB*, *COB*; & partant que ſi l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la diviſe par la différence du dénominateur, après

* *Art.* 2.

avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{aax}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'eſt à dire qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{1}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorſque $x = a$.

On pourroit réſoudre cet éxemple ſans avoir beſoin du calcul des différences, en cette ſorte.

Ayant ôté les incommenſurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant diviſé par $x - a$, ſe réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & ſubſtituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

LEMME.

FIG. 131. 166. SOIT *une ligne courbe quelconque* BCG, *avec une ligne droite* AE *qui la touche au point* B, *& ſur laquelle ſoient marqués à diſcrétion deux points fixes* A, E. *Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, en ſorte qu'elle la touche continuellement; il eſt clair que les point fixes* A, E *décriront dans ce mouvement deux courbes* AMD, ENH. *Si l'on mene à préſent* DL *parallele à* AB, *& qui faſſe par conſéquent avec* DK *(ſur laquelle je ſuppoſe la droite* AE *lorſqu'elle*

touche la courbe BCG *en* G) *l'angle* KDL *égal à l'angle* AOD *fait par les tangentes en* B, G; *& que l'on décrive comme on voudra, du centre* D *l'arc* KFL:

Je dis que DK. KFL :: AE. AMD ± ENH. *ſçavoir* + *lorſque le point touchant tombe toujours entre les points décrivans, &* — *lorſqu'il les laiſſe toujours du même côté.*

Car ſuppoſant que la droite *AE* en roulant autour de la courbe *BCG* ſoit parvenue dans les poſitions *MCN*, *mCn* infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons *DF*, *Df* paralleles à *CM*, *Cm*: il eſt clair que les ſécteurs *DFf*, *CMm*, *CNn* ſeront ſemblables; & qu'ainſi *DF*. *Ff* :: *CM*. *Mm* :: *CN*. *Nn* :: *CM* ± *CN* ou *AE*. *Mm* ± *Nn*. Or comme cela arrivera toujours en quelqu'endroit que ſe trouve le point touchant *C*, il s'enſuit que le rayon *DK* eſt à l'arc *KFL* ſomme de tous les petits arcs *Ff* :: *AE*. *AMD* ± *ENH* ſomme de tous les petits arcs *Mm* ± *Nn*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. IL eſt viſible que les courbes *AMD*, *ENH* ſont formées par le dévelopement de la même courbe *BCG*; & qu'ainſi la droite *AE* eſt toujours perpendiculaire ſur ces deux courbes dans toutes les poſitions où elle ſe rencontre: de ſorte que leur diſtance eſt par tout la même; ce qui eſt la propriété des lignes paralleles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe *AMD* étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe *ENH* ſans avoir beſoin de ſa dévelopée *BCG*, en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite *AE*.

COROLLAIRE II.

168. SI la courbe *BCG* a ſes deux moitiés *BC*, *CG* entiérement ſemblables & égales, & que l'on prenne les droites *BA*, *GH* égales entr'elles; il eſt clair que les courbes *AMD*, *ENH* ſeront ſemblables & égales, en ſorte

qu'elles ne différeront que par leur position. D'où il suit que la courbe AMD sera à l'arc de cercle $KFL :: \frac{1}{2} AE. DK$. c'est à dire en raison donnée.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 132. 169. SOIENT *deux courbes quelconques* AEV, BCG, *avec une troisiéme* AMD *telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe* BCG *une portion de courbe* EM, *la relation des portions de courbes* AE, EM, *& des rayons de la développée* EC, MG *soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné* M *sur la courbe* AMD *la tangente* MT.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em* infiniment proche de EM, & les rayons de la développée CeF, GmR; Soit, 1°. CH perpendiculaire sur CE, & qui rencontre en H la tangente EH de la courbe AEV. 2°. ML parallele à CE, & qui rencontre en L l'arc GL décrit du centre M & du rayon MG. 3°. GT perpendiculaire sur MG, & qui rencontre en T la tangente cherchée MT.

On nommera ensuite les données AE, x; EM, y; CE, u; GM, z; CH, s; EH, t; l'arc GL, r: d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles rectangles semblables eFE, ECH donneront $CE\,(u).\ CH\,(s) :: Fe\,(dz).\ FE = \frac{sdz}{u}$. Et $CE\,(u).\ EH\,(t) :: Fe\,(dz).\ Ee\,(dx) = \frac{tdz}{u}$.

* *Art.* 166. Or par le Lemme* $RF - me = \frac{rdz}{z}$; & partant $RM\,(\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables mRM, MGT, l'on aura $mR\,(dz).\ RM\,(\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy) :: MG\,(z).\ GT = r + \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$. Mais si l'on met dans la différence de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{tdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz, laquelle étant

ſubſtituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la ſoutangente cherchée GT une valeur entiérement connue & delivrée des differences. Ce qui etoit propoſé.

Si l'on ſuppoſe que la courbe BCG ſe réuniſſe en un point O; il eſt viſible que la portion de courbe ME (y) ſe change en un arc de cercle égal à l'arc GL (r), & que les rayons CE (u), GM (z) de la dévelopée deviennent egaux entr'eux: de ſorte que GT, qui devient en ce cas OT, ſe trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$. Fig. 133.

EXEMPLE.

170. SOIT $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront $dy = \frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend $* - xdz$ au lieu de $+ xdz$; parceque x & y croiſſant, z diminue) $= \frac{tdz - xdz}{a}$, en mettant pour dx ſa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant OT $(y + s + \frac{zdy}{dz}) = y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$ ſa valeur y. Fig. 133. * *Art.* 8.

REMARQUE.

171. SI le point O tombe ſur l'axe AB, & que la courbe AEV ſoit un demi-cercle; la courbe AMD ſera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN autour d'un arc egal BGN d'un cercle decrit du centre O, & dont le point generateur A tombera dehors, dedans, ou ſur la circonference du demi cercle mobile BSN, ſelon que la donnée a ſera plus grande, moindre, ou égale à OV. Pour le prouver, & determiner en même temps le point B. Fig. 134.

Je ſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſçavoir que la courbe AMD eſt une demi-roulette, formée par la révolution du demi cercle BSN, qui a pour centre le point K centre du demi cercle AEV, autour de l'arc BGN décrit du centre O; & concevant que ce demi-cercle BSN s'arrête dans la ſituation BGN telle que le point décrivant A

tombe sur le point M, je mene par les centres des cercles générateurs la droite OK qui passe par conséquent par le point touchant G; & tirant KSE, j'observe que les triangles OKE, OKM sont égaux & semblables, puisque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun. D'où il suit 1°. Que les angles extrêmes MOK, EOK sont égaux; & qu'ainsi les angles MOE, GOB le sont aussi: ce qui donne $GB.ME::OB.OE$. 2°. Que les angles MKO, EKO sont encore égaux; & qu'ainsi les arcs GN, BS, qui les mesurent, le sont aussi: la même chose se doit dire de leurs complémens GB, SN, à deux droits; puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc GB du cercle mobile est égal à l'arc GB de l'immobile. J'aurai donc $SN.ME::OB.OE$. Cela posé,

Je nomme les données OV, b; KV ou KA, c; & l'inconnue KB, u. J'ai $OB=b+c-u$; & les secteurs semblables KEA, KSN me donnent $KE\ (c).\ KS\ (u)::AE\ (x).\ SN=\frac{ux}{c}$. Et partant $OB\ (b+c-u).\ OE\ (z)::SN\ (\frac{ux}{c}).\ EM\ (y)=\frac{uxz}{bc+cc-cu}=\frac{xz}{a}$. D'où je tire $KB\ (u)=\frac{bc+cc}{a+c}$. Il est donc évident que si l'on prend $KB=\frac{bc+cc}{a+c}$, & qu'on décrive des centres K & O le demi-cercle BSN & l'arc BGN; la courbe AMD sera une demi-roulette décrite par la révolution du demi-cercle BSN autour de l'arc BGN, & dont le point décrivant A tombe dehors, dedans, ou sur la circonference de ce cercle, selon que $KV\ (c)$ est plus grand, moindre, ou égal à $KB\ (\frac{bc+cc}{a+c})$, c'est à dire selon que a est plus grand, moindre, ou égal à $OV\ (b)$.

COROLLAIRE I.

172. IL est clair que $EM\ (y).\ AE\ (x)::KB\times OE\ (uz).\ OB\times KV\ (bc+cc-uc)$. Or si l'on suppose que OB devienne infinie; la droite OE le sera aussi, & deviendra parallele à OB, puisqu'elle ne la rencontrera jamais; les

arcs concentriques *BGN*, *EM* deviendront des droites paralleles entr'elles, & perpendiculaires sur *OB*, *OE*: & alors la droite *EM* sera à l'arc *AE* :: *KB*. *KV*. parceque les droites infinies *OE*, *OB* ne differant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

COROLLAIRE II.

173. DE ce que les angles *MKO*, *EKO* sont égaux, il suit que les triangles *MKG*, *EKB* seront égaux & semblables; & qu'ainsi les droites *MG*, *EB* sont égales entr'elles. D'où l'on voit * que pour mener d'un point donné *M* sur la roulette, la perpendiculaire *MG*, il n'y a qu'à décrire du centre *O* l'arc *ME*, & du centre *M* de l'intervalle *EB* un arc de cercle qui coupera la base *BGN* en un point *G*, par où & par le point donné *M* l'on tirera la perpendiculaire requise. * *Art.* 43.

COROLLAIRE III.

174. UN point *G* étant donné sur la circonférence du demi-cercle mobile *BGN*; si l'on veut trouver le point *M* de la roulette sur lequel tombe le point décrivant *A* lorsque le point donné *G* touche la base, il ne faut que prendre l'arc *SN* égal à l'arc *BG*, & ayant tiré le rayon *KS* qui rencontre en *E* la circonférence *AEV*, décrire du centre *O* l'arc *EM*. Car il est évident que cet arc coupera la roulette au point cherché *M*.

PROPOSITION III.

Problême.

175. SOIT *une demi-roulette* AMD *décrite par la révolution du demi-cercle* BGN *autour d'un arc égal* BGN *d'un autre cercle, en sorte que les parties révolues* BG, BG *soient toujours égales entr'elles; soit le point décrivant* M *pris sur le diamétre* BN *dehors, dedans, ou sur la circonférence mobile* BGN. *On demande le point* M *de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à son axe* OA. FIG. 135. 136.

Supposant que le point *M* soit celui qu'on cherche, il

*Art. 47. eſt clair * que la tangente en M doit être parallele à l'axe OA; & qu'ainſi la perpendiculaire MG à la roulette, doit être auſſi perpendiculaire ſur l'axe qu'elle rencontre au point P. Cela poſé, ſi l'on mene OK par les centres des cercles générateurs, elle paſſera par le point touchant G; & ſi l'on tire KL perpendiculaire ſur MG, on formera les angles égaux GKL, GOB; & partant l'arc IG qui eſt le double de la meſure de l'angle GKL, ſera à l'arc GB meſure de l'angle GOB, comme le diamétre BN eſt au rayon OB. D'où il ſuit que pour déterminer ſur le demi-cercle BGN le point G, où il touche l'arc qui lui ſert de baſe lorſque le point décrivant M tombe ſur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle BGN en un point G, en ſorte qu'ayant tiré par le point donné M la corde IG, l'arc IG ſoit à l'arc BG en raiſon donnée de BN à OB. La queſtion ſe réduit donc à un Problême de la géométrie commune qui ſe peut toujours réſoudre géométriquement lorſque la raiſon donnée eſt de nombre à nombre; mais avec le ſecours des lignes dont l'équation eſt plus ou moins élevée, ſelon que la raiſon eſt plus ou moins compoſée.

Si l'on ſuppoſe que le rayon OB devienne infini, comme il arrive lorſque la baſe BGN devient une ligne droite; il s'enſuit que l'arc IG ſera infiniment petit par rapport à l'arc GB. D'où l'on voit que la ſécante MIG devient alors la tangente MT, lorſque le point décrivant M tombe au dehors du cercle mobile; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur lorſqu'il tombe au dedans.

Lorſque le point M tombe ſur la circonférence en N, il ne faut que diviſer la demi-circonférence BGN en raiſon donnée de BN à OB au point G. Car le point G ainſi trouvé, ſera celui où le cercle mobile BGN touche la baſe, lorſque le point décrivant tombe ſur le point cherché.

LEMME

LEMME II.

176. EN *tout triangle* BAC, *dont les angles* ABC, ACB, & CAD *complément à deux droits de l'angle obtus* BAC, *ſont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport entr'eux que les côtés* AC, AB, BC, *auſquels ils ſont oppoſez.* FIG. 137.

Car ſi l'on circonſcrit un cercle au tour du triangle *BAC*, les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui meſurent les doubles de ces angles, ſeront infiniment petits, & ne différeront* point par conſéquent de leurs cordes ou ſoutendantes. **Art. 3.*

Si les côtés *AC*, *AB*, *BC* du triangle *BAC*, ne ſont pas infiniment petits, mais qu'ils ayent une grandeur finie : il s'enſuit que le cercle circonſcrit doit être infiniment grand ; puiſque les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les meſures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

Problême.

177. LES *mêmes choſes étant poſées ; il faut déterminer ſur chaque perpendiculaire* MG, *le point* C *où elle touche la développée de la roulette.* FIG. 135. 136.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mg* infiniment proche de *MG*, & qui la coupe par conſéquent au point cherché *C*, on tirera la droite *Gm* ; & ayant pris ſur la circonférence du cercle mobile le petit arc *Gg* égal à l'arc *Gg* de l'immobile, on menera les droites *Mg*, *Ig*, *Kg*, *Og*. Cela poſé, ſi l'on regarde les petits arcs *Gg*, *Gg* comme de petites droites perpendiculaires ſur les rayons *Kg*, *Og*, il eſt clair que le petit arc *Gg* du cercle mobile tombant ſur l'arc *Gg* de l'immobile, le point décrivant *M* tombera ſur *m*, en ſorte que le triangle *GMg* ſe confondra avec le triangle *Gmg*. D'où l'on voit que l'angle *MGm* eſt égal à l'angle $gGg = GKg + GOg$; puiſqu'ajoûtant de part & d'autre les mêmes angles *KGg*, *OGg*, l'on en compoſe deux droits.

Or nommant les données *OG*, *b* ; *KG*, *a* ; *GM* ou *Gm*, *m* ;

* *Art.* 176. GI ou Ig, n; l'on trouve, 1°, * $OG . KG :: GKg . GOg$. Et $OG\,(b) . OG + GK$ ou $OK\,(b + a) :: GKg . GKg + GOg$

* *Ibid.* ou $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$. 2°. * $Ig . MI :: GMg . MgI$. Et $Ig \pm MI$ ou $MG\,(m) . Ig\,(n) :: GMg \pm MgI$ ou GIg ou $\frac{1}{2} GKg . GMg$

* *Ibid.* ou $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$. 3°. * L'angle MCm ou $MGm - Gmg$ $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg\right) . Gmg \left(\frac{n}{2m} GKg\right) :: Gm\,(m) . GC$ $= \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conſéquent le rayon cherché MC de la dévelopée ſera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Si l'on ſuppoſe que le rayon $OG\,(b)$ du cercle immobile devienne infini, ſa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parcequ'ils ſont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. DE ce que l'angle $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$, & de ce que les arcs de différens cercles ſont entr'eux en raiſon compoſée des rayons & des angles qu'ils méſurent; il ſuit que $Gg . Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conſéquent auſſi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qui eſt la même choſe) que $KG \times Mm . MG \times Gg :: OK\,(a+b) . OG\,(b)$. qui eſt une raiſon conſtante. D'où l'on voit que la dimenſion de la portion AM de la demi-roulette AMD, dépend de la ſomme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB; & c'eſt ce que M. *Paſcal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour baſes des lignes droites.

M. *Varignon* eſt tombé dans cette même propriété par une voye très différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

FIG. 135. 179. LORSQUE le point décrivant M tombe hors de

la circonférence du cercle mobile, il arrive neceſſairement l'un des trois cas ſuivans. Car menant la tangente MT, le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB, comme l'on a ſuppoſé dans la figure en faiſant le calcul ; & alors $MC\left(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}\right)$ ſurpaſſera toujours $MG\,(m)$. 2°. Sur le point touchant T ; & l'on aura pour lors $MC\left(\frac{2am+2bmm}{2amm+2bm-bn}\right) = m$, puiſque $IG\,(n)$ s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN ; & alors la valeur de $GI\,(n)$ devenant négative de poſitive qu'elle étoit, l'on aura $MC = \frac{2amm+2bmm}{2am+2bm+bn}$: de ſorte que MC ſera moindre que $MG\,(m)$, & toujours poſitif. D'où il eſt évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon MC de la dévelopée eſt toujours poſitive.

COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant M tombe au dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours $MC = \frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}$; & il peut arriver que bn ſurpaſſe $2am+2bm$, & qu'ainſi la valeur du rayon MC de la dévelopée ſoit négative : d'où l'on voit que lorſqu'elle ceſſe d'être poſitive pour devenir négative, comme il arrive *lorſque le point M devient un point d'infléxion, il faut néceſſairement alors que $bn = 2am+2bm$; & partant que $MI \times MG\,(mn-mm) = \frac{2amm+bmm}{b}$. Or ſi l'on nomme la donnée KM, c ; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG\left(\frac{2amm+bmm}{b}\right) = BM \times MN\,(aa-cc)$ ce qui donne l'inconnue $MG\,(m) = \sqrt{\frac{aab+bcc}{2a+b}}$. Donc ſi l'on décrit du point donné M comme centre, & de l'intervalle $MG = \sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$ un cercle ; il coupera le cercle mobile en un point G, où il touchera le cercle immobile qui lui ſert de baſe, lorſque le point décrivant M tombera ſur le point d'infléxion F. Fig. 136. *Art. 81.

Si l'on mene MR perpendiculaire ſur BN; il eſt clair que cette $MG\left(\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}\right)$ ſera moindre que $MR\,(\sqrt{aa-cc})$, & qu'elle lui doit être égale lorſque b devient infinie, c'eſt à dire lorſque la baſe de la roulette devient une ligne droite.

Il eſt à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon MG coupe le cercle mobile, il faut que MG ſurpaſſe MN, c'eſt à dire que $\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$ ſurpaſſe $a-c$; & qu'ainſi KM (c) ſurpaſſe $\frac{aa}{a+b}$. D'où il eſt manifeſte qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette AMD, il faut que KM ſoit moindre que KN, & plus grande que $\frac{aa}{a+b}$.

LEMME III.

Fig. 138. 181. SOIENT *deux triangles* ABb, CDd *qui ayent chacun un de leurs côtés* Bb, Dd *infiniment-petit par rapport aux autres : je dis que le triangle* ABb *eſt au triangle* CDd *en raiſon compoſee de l'angle* BAb *à l'angle* DCd, *& du quarré du côté* AB *ou* Ab *au quarré du côté* CD *ou* Cd.

Car ſi l'on décrit des centres A, C, & des intervalles AB, CD, les arcs de cercles BE, DF; il eſt clair * que les triangles ABb, CDd ne différeront point des ſecteurs de cercles ABE, CDF. Donc, &c.

* *Art.* 2.

Si les côtés AB, CD ſont égaux, les triangles ABb, CDd ſeront entr'eux comme leurs angles BAb, DCd.

PROPOSITION V.

Problême.

Fig. 135. 182. LES *mêmes choſes étant toujours poſées ; on demande la quadrature de l'eſpace* MGBA, *renfermé par les perpendiculaires* MG, BA *à la roulette, par l'arc* GB, *& par la portion* AM *de la demi-roulette* AMD, *en ſuppoſant la quadrature du cercle.*

L'angle $GMg\left(\frac{n}{2m}GKg\right)$ eſt à l'angle $MGm\left(\frac{a+b}{b}GKg\right)$,

comme * le petit triangle MGg qui a pour baſe l'arc Gg du cercle mobile, au petit triangle ou ſecteur GMm; & partant le ſecteur $GMm = \frac{2m}{n} MGg \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{2ap+2bp}{bn} MGg$ en nommant MI, p, & mettant pour m ſa valeur $p+n$. Or * le petit triangle ou ſecteur KGg eſt au petit triangle MGg en raiſon compoſée du quarré de KG au quarré de MG, & de l'angle GKg à l'angle GMg; c'eſt à dire :: $aa \times GKg . mm \times \frac{n}{2m} GKg$. & partant le petit triangle $MGg = \frac{mn}{2aa} KGg$. Mettant donc cette valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg$, l'on aura le ſecteur $GMm = \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times pm}{aab} KGg$. Mais à cauſe du cercle, $GM \times MI\ (pm) = BM \times MN\ (cc-aa)$, qui eſt une quantité conſtante, & qui demeure toujours la même en quelqu'endroit que ſe trouve le point décrivant M; & par conſéquent $GMm + MGg$ ou mGg, c'eſt à dire le petit eſpace de la roulette $GMmg = \frac{2a+3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$. Donc puiſque $GMmg$ eſt la différence de l'eſpace de la roulette $MGBA$, & MGg celle de l'eſpace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit ſecteur KGg eſt la différence du ſecteur KGB; il s'enſuit * que l'eſpace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} MGB + \frac{\overline{a+v} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGB$. Ce qu'il falloit trouver.

* *Art.* 181.

* *Art.* 181.

* *Art.* 96.

Lorſque le point décrivant M tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe ſur l'arc NT; il eſt viſible * que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors $m = p-n$. D'où il ſuit que le petit ſecteur $GMm = -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{2ap+2bp}{bn} MGg = -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{amp+bmp}{aab} KGg$, en mettant comme auparavant pour le

FIG. 139.

* *Art.* 180.

petit triangle MGg ſa valeur $\frac{mn}{2aa} KGg$; & partant que $GMm - MGg$ ou mGg, c'eſt à dire $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$, en mettant pour pm ſa valeur $cc - aa$.

Or ſuppoſant que TH ſoit la poſition de la tangente TM du cercle mobile, lorſque ſon point T touche la baſe au point T; il eſt clair que $MCm - GCg = MGTH - mgTH$, c'eſt à dire la différence de l'eſpace $MGTH$, & que MGg eſt
Art. 96. celle de MGT, de même que KGg celle de KGT. Donc l'eſpace $MGTH = -\frac{2a-3b}{b} MGT + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGT$. Mais, comme l'on vient de prouver, l'eſpace $HTBA = \frac{2a+3b}{b} MTB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KTB$. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'eſpace $MGBA (MGTH + HTBA) = \frac{2a+3b}{b} \overline{MTB - MGT}$ ou $MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} \overline{KGT + KTB}$ ou KGB.

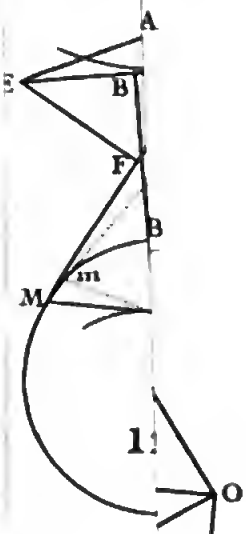
FIG. 135. Donc l'eſpace entier $DNBA$ renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN, BA, par l'arc de cercle BGN, & par la demi roulette AMD, eſt $= \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab}} \times KNGB$; puiſque le ſecteur KGB & l'eſpace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle $KNGB$, lorſque le point touchant G tombe au point N.

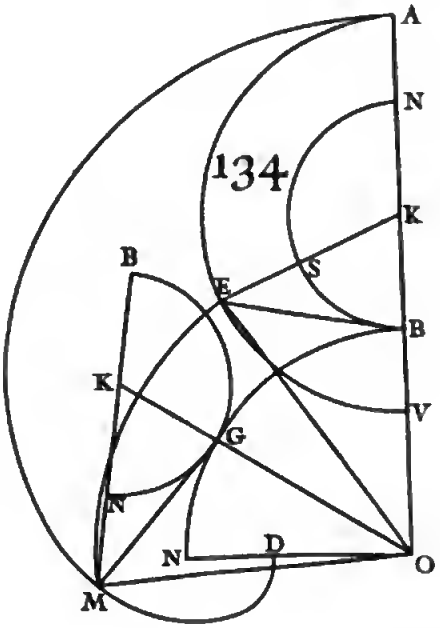
FIG. 136. Lorſque le point décrivant M tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes; parcequ'alors $BM \times MN = aa - cc$.

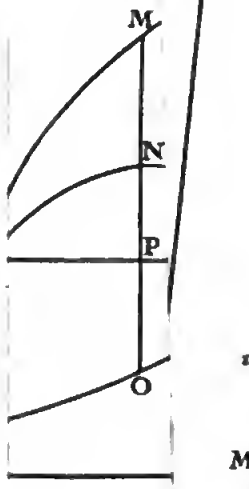
Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant ſur la circonférence du cercle mobile; & ſi l'on ſuppoſe b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour baſes des lignes droites.

AUTRE SOLUTION.

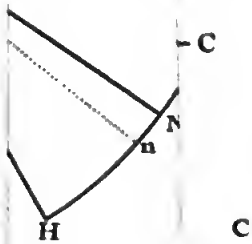
FIG. 140. 183. ON décrit du rayon OD l'arc DV, & des diamétres AV, BN les demi-cercles AEV, BSN; & ayant décrit

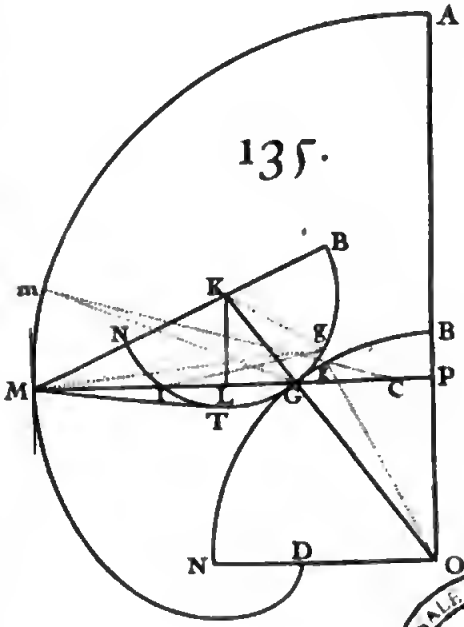






131.





137.

NAPOLI

à discrétion du centre *O* l'arc *EM* renfermé entre le demi-cercle *AEV* & la demi-roulette *AMD*, l'on mene l'appliquée *EP*. Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace *AEM* compris entre les arcs *AE*, *EM*, & la portion *AM* de la demi-roulette *AMD*.

Pour cela, soit un autre arc *em* concentrique & infiniment proche de *EM*, une autre appliquée *ep*, une autre *Oe* qui rencontre l'arc *ME* prolongé (s'il est nécessaire) au point *F*. Soient nommées les variables *Oe*, *z*; *VP*, *u*; l'arc *AE*, *x*; & comme auparavant les constantes *OB*, *b*; *KB* ou *KN*, *a*; *KV* ou *KA*, *c*: l'on aura $Fe = dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE}^2 = 2cu - uu$, l'arc EM * $= \frac{axz}{bc}$; & partant le rectangle fait de l'arc *EM* par la petite droite *Fe*, c'est à dire * le petit espace $EMme = \frac{axzdz}{bc}$. Or à cause du triangle rectangle *OPE*; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit espace $EMme = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}$.

* *Art.* 172.

* *Art.* 2.

Maintenant si l'on décrit la demi-roulette *AHT* par la révolution du demi-cercle *AEV* sur la droite *VT* perpendiculaire à *VA*, & qu'on prolonge les appliquées *PE*, *pe* jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points *H*, *h*: il est clair * que $EH \times Pp$, c'est à dire le petit espace $EHhe = xdu$; & qu'ainsi $EMme\left(\frac{aaxdu + abxdu}{bc}\right).EHhe\,(xdu) :: aa + ab.bc$. qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quelqu'endroit que se trouve l'arc *EM*, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces *EMme*, c'est à dire l'espace *AEM*, est à la somme de tous les petits espaces *EHhe*, c'est à dire à l'espace $AEH :: aa + ab.bc$. Mais l'on a * la quadrature de l'espace *AEH* dépendamment de celle du cercle; & partant aussi celle de l'espace cherché *AEM*.

* *Art.* 172.

* *Art.* 99.

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Aoust de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'eſpace AEH ſans avoir recours à l'art. 99. Car ſi l'on acheve les réctangles PQ, pq, l'on aura Qq ou $HR . Pp$ ou $Rh :: EP . PA$ ou HQ. puiſque * la tangente en H eſt parallele à la corde AE; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'eſt à dire que les petits eſpaces $HQqh$, $EPpe$ ſont toujours égaux entr'eux. D'où il ſuit que l'eſpace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, eſt égal à l'eſpace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'eſpace AEH ſera donc égal au réctangle PQ moins le double de l'eſpace circulaire APE; c'eſt à dire au réctangle fait de PE par KA plus ou moins le réctangle fait de KP par l'arc AE, ſelon que le point P tombe au deſſous ou au deſſus du centre. Et par conſéquent l'eſpace cherché $AEM = \frac{aa+ab}{bc} \overline{PE \times KA \pm KP \times AE}$.

* *Art.* 18.

COROLLAIRE I.

184. LORSQUE le point P tombe en K, le réctangle $KP \times AE$ s'évanouit, & le réctangle $PE \times KA$ devient égal au quarré de KA: d'où l'on voit que l'eſpace AEM eſt alors $= \frac{aac+abc}{b}$; & par conſéquent il eſt quarrable abſolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE II.

185. SI l'on ajoûte à l'eſpace AEM le ſécteur AKE, l'eſpace $AKEM$ renfermé par les rayons AK, KE, par l'arc EM, & par la portion AM de la demi-roulette AMD, ſe trouve (lorſque le point P tombe au deſſus du centre K) $= \frac{bcc+2aac+2abc-2aau-2abu}{2bc} AE + \frac{aa+ab}{bc} PE \times KA$; & partant ſi l'on prend $VP(u) \frac{2aac+2abc+bcc}{2aa+2ab}$ (ce qui rend nulle la valeur de $\frac{bcc+2aac+2abc-2aau-2abu}{2bc} AE$), l'on aura l'eſpace

l'eſpace $AKEM = \frac{aa+ab}{bc} PE \times KA$. D'où l'on voit que ſa quadrature eſt encore indépendante de celle du cercle.

Il eſt viſible qu'entre tous les eſpaces AEM & $AKEM$, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature ſoit abſolue.

AVERTISSEMENT.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures ſe doit auſſi entendre des intérieures, c'eſt à dire de celles dont le cercle mobile roule au dedans de l'immobile ; en obſervant que les noyaux KB (a), KV (c) *deviennent négatifs de poſitifs qu'ils étoient. C'eſt pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les ſignes des termes où* a *&* c *ſe rencontrent avec une dimenſion impaire.*

REMARQUE.

186. IL y a certaines courbes qui paroiſſent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point ; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique NDN, dont la nature eſt exprimée par l'équation $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{1xx-aa}}$ ($AP = x$, $PN = z$), dans laquelle il eſt clair 1°. Que x étant égale à a ; PN (z) s'évanouit. 2°. Que x ſurpaſſant a, la valeur de z eſt poſitive ; & qu'au contraire lorſqu'il eſt moindre, elle eſt négative. 3°. Que lorſque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN eſt infinie. D'où l'on voit que la courbe NDN paſſe de part & d'autre de ſon axe en le coupant en un point D tel que $AD = a$; & qu'elle a pour aſymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$. Fig. 141.

Si l'on décrit à préſent une autre courbe EDF, en ſorte qu'ayant mené à diſcrétion la perpendiculaire MPN, le réctangle fait de l'appliquée PM par la conſtante AD,

ſoit toujours égal à l'eſpace correſpondant DPN; il eſt viſible qu'en nommant PM, y; & prenant les différences, l'on aura $AD \times Rm(ady) = NPpn$ ou $NP \times Pp$ $\left(\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{xxx - aa}}\right)$; & partant $Rm\,(dy).\,Pp$ ou $RM\,(dx)$ :: $PN.\,AD$. D'où il ſuit que la courbe EDF touche l'aſymptote EG prolongée de l'autre côté de B en un point E, & l'axe AP au point D; & qu'ainſi elle doit avoir un point d'infléxion en D. Cependant on trouve * $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de ſa dévelopée, laquelle eſt toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorſque le point M tombe en D: d'où l'on doit conclure * que la courbe qui paſſe par tous les points M eſt toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a pas de point d'infléxion en D. Comment donc accorder tout cela? En voici le dénouëment.

*Art. 78.

*Art. 81.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui ſera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie; puiſque ſa génération eſt la même. Cela étant ainſi, l'on doit penſer que les parties qui compoſent la courbe entiére ne ſont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui ſe touchent au point D; car tout s'accorde parfaitement dans cette derniere ſuppoſition. Ceci ſe confirme encore par cet éxemple.

Fig. 142. Soit la courbe DMG, qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Il ſuit de cette équation que la courbe entiére a deux parties EDH, GDF oppoſées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, en ſorte que leur diſtance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Fig. 143. Si l'on ſuppoſe que b s'évanouiſſe, la diſtance DD s'évanouira auſſi; & partant les deux parties EDH, GDF ſe toucheront au point D: de ſorte qu'on pourroit penſer à préſent que cette courbe a un point d'infléxion ou de rebrouſſement en D, ſelon qu'on imagineroit que ſes par-

ties ſeroient *EDF*, *GDH* ou *EDG*, *HDF*. Mais l'on ſe détromperoit aiſément, en cherchant le rayon de la développée ; car l'on trouveroit qu'il ſeroit toujours poſitif, & qu'il deviendroit égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point *D*.

On peut remarquer en paſſant, que la quadrature de l'eſpace *DPN* dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce qui revient au même) de la réctification de la parabole ; & que la portion de courbe *DMF* ſatisfait au Problême propoſé par M. *Bernoulli* dans le Tome ſecond des Supplémens des Actes de Leypſic, page 291. FIG. 141.

SECTION X.

Nouvelle manière de ſe ſervir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M^rs Deſcartes *&* Hudde.

DÉFINITION I.

Fig. 144. 145. 146. SOIT une ligne courbe *ADB* telle que les paralleles *KMN* à ſon diamétre *AB* la rencontrent en deux points *M*, *N*; & ſoit entendue la partie interceptée *MN* ou *PQ* devenir infiniment petite. Elle ſera nommée alors la *Différence* de la coupée *AP*, ou *KM*.

COROLLAIRE I.

187. LORSQUE la partie *MN* ou *PQ* devient infiniment petite; il eſt clair que les coupées *AP*, *AQ* deviennent égales chacune à *AE*, & que les points *M*, *N* ſe réuniſſent en un point *D*: en ſorte que l'appliquée *ED* eſt la plus grande ou la moindre de toutes ſes ſemblables *PM*, *NQ*.

COROLLAIRE II.

188. IL eſt clair qu'entre toutes les coupées *AP*, il n'y a que *AE* qui ait une différence; parcequ'il n'y a qu'en ce cas où *PQ* devienne infiniment petite.

COROLLAIRE III.

189. SI l'on nomme les indéterminées *AP* ou *KM*, *x*; *PM* ou *AK*, *y*; il eſt évident que *AK* (*y*) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de *x*, ſçavoir *KM*, *KN* ou *AP*, *AQ*. C'eſt pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe *ADB* ſoit délivrée d'incommenſurables, afin que la même inconnue *x* qui en marque les racines (car on regarde *y* comme connue) puiſſe avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut obſerver dans la ſuite.

PROPOSITION I.

Problême.

190. LA *nature de la courbe géométrique* ADB *étant donnée ; déterminer la plus grande ou la moindre de ſes appliquées* ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme conſtante, & x comme variable ; il eſt clair * qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ſes racines x, une valeur AE, telle que l'appliquée ED ſera la plus grande ou la moindre de toutes ſes ſemblables. * *Art.* 188.

Soit, par éxemple, $x^3+y^3=axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme conſtante, donne $3xxdx=aydx$; & partant $y=\frac{3xx}{a}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3+y^3=axy$; l'on aura pour x une valeur $AE=\frac{1}{3}a\sqrt{2}$, telle que l'appliquée ED ſera la plus grande de toutes ſes ſemblables, de même qu'on l'a déja trouvé art. 48.

Il eſt évident que l'on détermine de même non ſeulement les points D, lorſque les appliquées ED ſont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais auſſi lorſqu'elles ſont obliques ſur la courbe, c'eſt à dire lorſque les points D ſont des points de rebrouſſement de la premiere ou ſeconde ſorte. D'où l'on voit que cette nouvelle maniére de conſidérer les différences dans les courbes géométriques eſt plus ſimple & moins embarraſſante en quelques rencontres, que la * premiere. * *Sect.* 3.

REMARQUE.

191. ON peut remarquer dans les courbes rebrouſſantes, que les PM paralleles à AK, les rencontrent en deux points M, O, de même que les KM paralleles à AP, ſont en M, N : de ſorte que $AP(x)$ demeurant la même, y a deux FIG. 146.

différentes valeurs PM, PO. C'eſt pourquoi l'on peut traiter x comme conſtante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que ſi l'on traite x & y comme variables, en prenant cette différence, il faudra que tous les termes qui multiplient dx d'une part, & tous ceux qui multiplient dy d'une autre part, ſoient égaux à zero. Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

COROLLAIRE.

192. SI après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence; il eſt clair 1°. Qu'on ne fait autre choſe que de multiplier chaque terme par l'expoſant de la puiſſance de x, & par la différence dx, & le diviſer enſuite par x. 2°. Que cette diviſion par x, auſſi-bien que la multiplication par dx, peut être négligée, parcequ'elle eſt la même dans tous les termes. 3°. Que les expoſans des puiſſances de x ſont une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'expoſant de ſa plus grande puiſſance, & le dernier eſt zero; car on ſuppoſe qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit par éxemple $x^3 * - ayx + y^3 = 0$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = 0$.

$$\begin{array}{l} x^3 \quad * \quad -ayx + y^3 = 0. \\ 3, \quad 2, \quad\quad 1, \quad\quad 0. \\ \hline 3x^3 \quad * \quad -ayx \quad\quad * = 0. \end{array}$$

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la maniére accoûtumée.

Cela ſuppoſé, je dis qu'au lieu de la progreſſion arith-

métique 3,2,1,0, l'on peut ſe ſervir de telle autre progreſſion arithmétique qu'on voudra : $m+3, m+2, m+1, m+0$, ou m (l'on déſigne par m un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif, ou négatif). Car multipliant $x^3 * - ayx + y^3 = 0$ par x^m, l'on aura $x^{m+3} *$, &c. $= 0$, dont les termes doivent être multipliés par ceux de la progreſſion $m+3, m+2, m+1, m$. chacun par ſon correſpondant pour en avoir la différence.

$$\begin{array}{llll} x^{m+3} & * & -ayx^{m+1} & +y^3x^m = 0. \\ m+3, & m+2 & m+1, & m. \end{array}$$

$$\overline{m+3}x^{m+3} \quad * \quad -\overline{m+1}ayx^{m+1} + my^3x^m = 0.$$

Ce qui donnera $\overline{m+3}x^{\cdot\cdot\cdot} - \overline{m+1}ayx^{\cdot\cdot\cdot} + my^3x^m = 0$; & en diviſant par x^m, il viendra $\overline{m+3}x^3 - \overline{m+1}ayx + my^3 = 0$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant ſimplement l'égalité propoſée par la progreſſion $m+3$, $m+2, m+1, m$.

Si $m = -3$, la progreſſion ſera $0, -1, -2, -3$; & l'équation ſera $2ayx - 3y^3 = 0$. Si $m = -1$, la progreſſion ſera $2, 1, 0, -1$; & l'équation $2x^3 - y^3 = 0$.

On peut changer de ſignes tous les termes de la progreſſion, c'eſt à dire qu'au lieu de $0, -1, -2, -3$, & $2, 1, 0, -1$, l'on peut prendre $0, 1, 2, 3$, & $-2, -1, 0, 1$; parcequ'on ne fait par là que changer de ſignes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égalée à zero. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = 0$, $2x^3 - y^3 = 0$, l'on auroit $-2ayx + 3y^3 = 0$, $-2x^3 + y^3 = 0$; ce qui eſt la même choſe.

Or il eſt viſible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet éxemple, s'appliquera de même maniére à tous les autres. D'où il ſuit que ſi après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines égales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progreſſion arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ſes racines une des deux égales de la premiére. Par la même raiſon, ſi cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progreſſion arith-

métique, l'on en formera une troiſiéme qui aura entre ſes racines une des deux égales de la ſeconde ; & ainſi de ſuite. De ſorte que ſi l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progreſſions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ſes racines une des trois égales de la premiére ; & de même ſi l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progreſſions arithmétiques ; ſi cinq, par le produit de quatre, &c.

C'eſt là préciſément en quoi conſiſte la Méthode de M. *Hudde*.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 147. 193. D'UN *point donné* T *ſur le diamètre* AB, *ou du point donné* H *ſur* AH *parallele aux appliquées ; mener la tangente* THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT, s ; AH, t ; dont l'une ou l'autre eſt donnée ; & les inconnues AP, x ; PM, y : les triangles ſemblables TAH, TPM donneront $y = \frac{st+tx}{s}$, $x = \frac{sy-st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de y ou de x dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne ſe rencontrera plus.

Si l'on mene à préſent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G, & la courbe AMD en deux points N, D, deſquels l'on abbaiſſe les appliquées NQ, DB ; il eſt évident que t exprimant AG dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, leſquelles deviennent égales entr'elles, ſçavoir à la cherchée AP ou PM lorſque t exprime AH, c'eſt à dire lorſque la ſécante TDN devient la tangente TM. D'où il ſuit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'eſt pourquoi on la multipliera par une progreſſion arithmétique arbitraire ;

bitraire ; ce que l'on réïtérera, s'il eſt néceſſaire, en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progreſſion arithmétique quelconque, afin que par la comparaiſon des équations qui en réſultent, l'on en puiſſe trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y, avec la donnée s ou t. L'exemple qui ſuit éclaircira ſuffiſamment cette Méthode.

EXEMPLE.

194. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD. Si l'on met à la place de x ſa valeur $\frac{sy - ss}{t}$, l'on aura tyy, &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$tyy - asy + ast = 0.$$
$$1, \quad 0, \quad -1.$$
$$tyy \quad * \quad -ast = 0.$$

C'eſt pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progreſſion arithmétique $1, 0, -1$, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant $AP\ (x) = s$. D'où l'on voit qu'en prenant $AP = AT$; & menant l'appliquée PM, la ligne TM ſera tangente en M. Mais ſi au lieu de $AT\ (s)$, c'eſt $AH\ (t)$ qui eſt donnée, l'on multipliera la même équation tyy, &c. par cette autre progreſſion $0, 1, 2$, & l'on aura la cherchée $PM\ (y) = 2t$.

On auroit trouvé la même conſtruction en mettant pour y ſa valeur $\frac{st + tx}{s}$ dans $ax = yy$. Car il vient $ttxx$, &c. dont les termes multipliés par $1, 0, -1$, donnent $xx = ss$; & par conſéquent $AP\ (x) = s$.

COROLLAIRE.

195. SI l'on veut à préſent que le point touchant M ſoit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel la tangente MT rencontre le diametre AB ou la parallele AH aux appliquées ; il n'y a qu'à regarder dans la derniére équation, qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t, cette derniére comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

Problême.

FIG. 148. **196.** LA *nature de la courbe géométrique* AFD *étant donnée; déterminer ſon point d'inflexion* F.

Ayant mené le point cherché *F* l'appliquée *FE* avec la tangente *FL*, par le point *A* (origine des *x*) la parallele *AK* aux appliquées, & nommé les inconnues *LA*, *s*; *AK*, *t*; *AE*, *x*; *EF*, *y*: les triangles ſemblables *LAK*, *LEF* donneront encore $y = \frac{st+tx}{s}$, & $x = \frac{sy-st}{t}$, de ſorte que mettant ces valeurs à la place de *y* ou *x* dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle *y* ou *x* ne ſe rencontrera plus, de même que dans la propoſition précédente.

Si l'on mene à préſent une ligne droite *TD* qui coupe la droite *AK* en *H*, qui touche la courbe *AFD* en *M*, & la coupe en *D*, d'où l'on abaiſſe les appliquées *MP*, *DB*: il eſt évident 1°. Que *s* exprimant *AT*; & *t*, *AH*; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, ſçavoir* chacune à *AP* ou à *PM* ſelon qu'on a fait évanouir *y* ou *x*, & une autre *AB*, ou *BD*. 2°. Que *s* exprimant *AL*; & *t*, *AK*; le point touchant *M* ſe réunit avec le point d'interſection *D* dans le point cherché *F*: puiſque* la tangente *LF* doit toucher & couper la courbe dans le point d'inflexion *F*; & qu'ainſi les valeurs *AP*, *AB* de *x* ou *PM*, *BD* de *y* deviennent égales entr'elles, ſçavoir l'une & l'autre à la cherchée *AE* ou *EF*. D'où il ſuit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'eſt pourquoi on la multipliera par le produit de deux progreſſions arithmétiques arbitaires; ce que l'on réïtérera, s'il eſt néceſſaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progreſſions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaiſon des équations qui en réſultent, l'on puiſſe faire évanouir les inconnues *s* & *t*.

* *Art.* 193.

* *Art.* 67.

EXEMPLE.

197. SOIT $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{s}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$\begin{array}{llllll} sy^3 & - styy & + aasy & - aast & = 0. \\ & - at & & & \\ 1, & 0, & - 1, & - 2. & \\ 3, & 2, & 1, & 0. & \\ \hline 3sy^3 & * & - aasy & * & = 0. \end{array}$$

qui étant multipliée par $3, 0, -1, 0$, produit des deux progressions arithmétiques $1, 0, -1, -2$, & $3, 2, 1, 0$, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue $AE\ (x) = \frac{1}{4}a$. Ce qui revient à l'art. 68.

AUTRE SOLUTION.

198. ON peut encore résoudre ce Problême en remarquant que du même point L ou K on ne peut mener qu'une seule tangente LF ou KF; parcequ'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans le convexe FD; au lieu que de tout autre point T ou H, pris sur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave, & l'autre de la convexe: de sorte qu'on peut considérer le point d'inflexion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on suppose que $AT(s)$ ou $AH(t)$ soit donnée, & qu'on cherche * la valeur de x ou y par rapport à s ou t; l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF, lorsque s exprime AL & t, AK. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique arbitraire, &c. FIG. 149. 150. * *Art.* 194.

EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-dessus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = o$, qui étant multipliée par la progression arithmétique $1, o, -1, -2$, donne $y^3 x - aay - 2aat = o$, dans laquelle s ne se rencontre plus, & qui a deux racines inégales, sçavoir PM, BD, lorsque t exprime AH, & deux égales chacune à la cherchée EF lorsque t exprime AK. C'est pourquoi multipliant de nouveau cette derniére équation par la progression arithmétique $3, 2, 1, o$, l'on aura $3yy - aa = o$; & partant $EF\,(y) = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 151. 200. MENER *d'un point donné* C *hors une ligne courbe* AMD *une perpendiculaire* CM *à cette courbe.*

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diamétre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant ensuite les inconnues AP, x; PM, y; CM, r; & les connues AK, s; KC, t: l'on aura PK ou $CE = s - x$, $ME = y + t$; & à cause du triangle réctangle MEC, $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$, $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D, d'où l'on abaisse les perpendiculaires NQ, DB; il est évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque r exprime le rayon CM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, dans laquelle mettant pour x sa valeur $s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$, l'on aura $as - yy = a\sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant ensuite l'équation, l'on trouvera y^4, &c. qui doit avoir deux racines égales lorsque y exprime la cherchée PM.

$$\begin{array}{llll} y^4 & * - 2asyy + 2aaty + aass = 0. \\ & + aa \qquad\quad - aarr \\ & \qquad\quad + aatt \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 4y^4 & * - 4asyy + 2aaty \qquad * = 0. \\ & + 2aa \end{array}$$

C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique $4, 3, 2, 1, 0$, ce qui donnera $4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = 0$, dont la résolution fournira pour y la valeur cherchée MP.

Si le point donné C tomboit sur le diamétre AB; l'on auroit alors $t = 0$, & il faudroit effacer par conséquent tous les termes où t se rencontre; ce qui donneroit $4as - 2aa = 4yy = 4ax$, en mettant pour yy sa valeur ax. D'où l'on tireroit $x = s - \frac{1}{2}a$; c'est à dire que si l'on prend CP égale à la moitié du paramétre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire sur AB, l'on mene la droite CM, elle sera perpendiculaire sur la courbe AMD. FIG. 152.

COROLLAIRE.

202. SI l'on veut à présent que le point M soit donné, & que le point C soit celui qu'on cherche; il faudra dans la derniere équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y), regarder ces dernières comme connues, & l'autre comme l'inconnue. FIG. 152.

DEFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la développée l'on décrit un cercle, il ſera nommé *cercle baiſant.*

Le point où ce cercle touche ou baiſe la courbe, eſt appellé *point baiſant.*

PROPOSITION V.

Problême.

FIG. 153. 203. LA *nature de la courbe* AMD *étant donnée avec un de ſes points quelconque* M ; *trouver le centre* C *du cercle qui la baiſe en ce point* M.

Ayant mené les perpendiculaires *MP*, *CK* ſur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problême précédent ; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut obſerver que la lettre *x* ou *y*, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée ; & qu'au contraire *s*, *t*, que l'on y regarde comme connues, ſont en effet ici les inconnues auſſi bien que *r*.

Cela poſé, il eſt clair 1°. Que le point cherché *C* ſera ſitué ſur la perpendiculaire *MG* à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en *M*, & la coupera au moins en deux points (dont je ſuppoſe que le plus proche eſt *D*, d'où l'on abaiſſera la perpendiculaire *DB*) ; puiſque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant *M* n'équivaut qu'à deux interſections. 3°. Que plus ſon centre *G* approche du point cherché *C*, plus auſſi le point d'interſection *D* approche du point touchant *M* : de ſorte que le point *G* tombant ſur le point *C*, le point *D* ſe réunit avec le point *M* ; puiſque * le cercle décrit du rayon *CM*, doit toucher & couper la courbe au même point *M*. D'où l'on voit que *s* exprimant *AF*, & *t*, *FG*, l'équation doit avoir deux racines égales, ſçavoir * chacune à *AP* ou *PM* ſelon qu'on a fait

*Art. 76.

*Art. 200.

évanouir y ou x, & une autre AB ou BD qui devient auſſi égale à AP ou PM lorſque s & t expriment les cherchées AK, KC; & qu'ainſi cette équation doit avoir trois racines égales.

EXEMPLE.

204. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera *y^4, &c. qui étant multipliée par $8, 3, 0, -1, 0$, produit des deux progreſſions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $2, 1, 0, -1, -2$ donne $8y^4 = 2aaty$. *Art. 201.

$$y^4 * - 2asyy + 2aaty + aass = 0.$$
$$+ aa \qquad - aarr$$
$$+ aatt$$

4,	3,	2,	1,	0.	
2,	1,	0,	— 1,	— 2.	
$8y^4$	*	*	$-2aaty$	*	$= 0.$

D'où l'on tire la cherchée KC ou $PE\ (t) = \frac{4y^3}{aa}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui paſſe par tous les points C, l'on multipliera encore y^4, &c. par $0, 3, 4, 3, 0$, produit des deux progreſſions $4, 3, 2, 1, 0$, & $0, 1, 2, 3, 4$; & l'on trouvera $8asy - 4aay = 6aat$: d'où, en ſuppoſant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3at}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant $16u^3 = 27att$. D'où il ſuit que la courbe qui paſſe par tous les points C, eſt une ſeconde parabole cubique, dont le paramétre $= \frac{27a}{16}$, & dont le ſommet eſt éloigné de celui de la parabole propoſée de $\frac{1}{2}a$; parceque $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorſque la poſition des parties de la courbe, voiſines du point donné M, eſt entiérement ſemblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorſque la courbure y eſt la plus grande ou la moindre; il s'enſuit que l'une des interſections du cercle touchant ne peut ſe réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réuniſſe en

même temps : de sorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. En effet si l'on multiplie y^4, &c. par $24, 6, 0, 0, 0$, produit des trois progressions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $3, 2, 1, 0, -1$, & $2, 1, 0, -1, -2$; l'on aura $24y^4 = 0$: ce qui fait voir que le point M doit tomber sur le sommet A de la parabole, afin que la position des parties voisines de la courbe soit semblable de part & d'autre.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 154. 205. ON peut encore résoudre ce Problême en se souvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une seule perpendiculaire CM à la courbe AMD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G sur cette perpendiculaire MC, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on suppose que le point G soit donné, & que l'on cherche * la valeur de x ou y par rapport aux données s & t; il est visible que cette équation doit avoir deux racines inégales, sçavoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entr'elles lorsque le point G tombe sur le point cherché C. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique quelconque, &c.

*Art. 200.

EXEMPLE.

Art. 101. 206. SOIT comme ci-dessus $ax = yy$; & l'on aura $4y^3$, &c.

$$\begin{array}{l} 4y^3 \;*\; -4asy + 2aat = 0. \\ \qquad\quad + 2aa \\ \hline 2,\quad 1,\quad 0,\quad -1. \\ \hline 8y^3 \;*\quad *\quad -2aat = 0. \end{array}$$

qui étant multipliée par la progression arithmétique $2, 1, 0, -1$, donne comme * auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$.

*Art. 204.

COROL.

608243 Biblioteca Nazionale Napoli

BIBLIOTECA